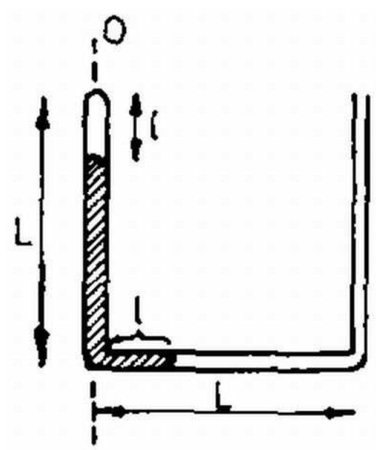
Az Eötvös, Loránd Fizikai Társulat 1981. október 17-én rendezte 58. versenyét Budapesten és 11 vidéki városban az azévben érettségizettek és középiskolások részére. A versenyzők 5 órai munkaidő alatt oldhatták meg a három feladatot. Bármely segédeszköz, használata meg volt engedve, beleértve a zsebszámítógépet is. A versenyen 209 dolgozatot adtak be. Ismertetjük a feladatokat és a verseny eredményét.

1. *Az* 1. *ábra szerinti vékony cső mindkét szára L hosszúságú. A zárt szárban és a vízszintes szárban elhelyezkedő higanyoszlop teljes hossza L. Az elzárt légoszlop hossza l. A szerkezetet az $O-O$ tengely körül ω szögsebességgel forgatjuk. Állapítsuk meg a higanyoszlop elhelyezkedése és a szögsebesség közötti összefüggést! Vizsgáljuk meg az egyensúlyi helyzetek stabilitását! Számadatok: a külső légnyomás p_{00} = 103 360 Pa, a higany sűrűsége $\varrho = 13\,600$ kg/m^3, $g = 10$ m/s^2, $L = 0{,}1$ m, $l = 0{,}025$ m.*

Megoldás. Először kiszámítjuk az elzárt levegő p_0 nyomását forgatás előtt. Ezt megkapjuk, ha a külső légnyomásból levonjuk a higanyoszlop hidrosztatikai nyomását:

$$p_0 = p_{00} - (L-l)\varrho g. \tag{1}$$

Vizsgáljuk azt az állapotot, amikor a higany részben még a bal oldali csőben is megvan, vagyis $l \le x \le L$, ahol x a higanyoszlop jobb oldali végének a forgástengelytől mért távolsága (2. ábra). A higany x adattal jellemzett állapotában az elzárt levegő nyomása (p) Boyle–Mariotte törvénye szerint:



1. ábra

$$xp = p_0 l,$$

ebből (1) felhasználásával:

$$p = \frac{[p_{oo} - (L-l)\varrho g]\,l}{x} i \tag{2}$$

A vízszintes szárban levő higany körpályán mozog, tehát a rá ható erők eredője (külső légnyomás mínusz az elzárt levegő nyomása és a függőleges szárban levő higany hidrosztatikai nyomása) egyenlő a centripetális erővel:

$$x\varrho\omega^2 \cdot \frac{x}{2} = p_{00} - p - (L-x)\varrho g. \tag{3}$$

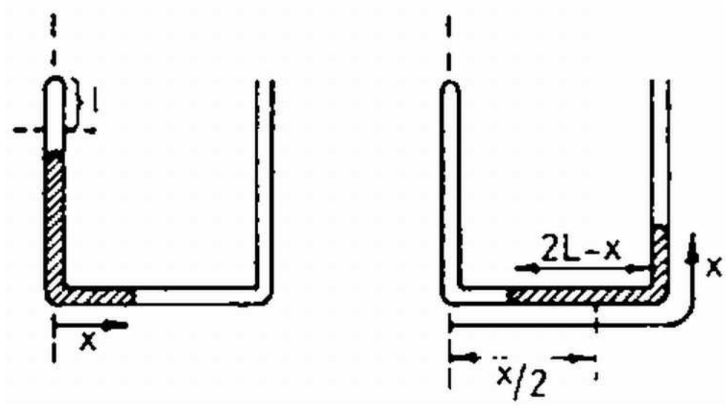
Miután a centripetális erő r-rel egyenes arányban növekszik, ezért a távolságok számtani középértékével számoltunk. Egyenletünkből (2)-vel az ω szögsebességet tudjuk kifejezni mint x függvényét:

$$\omega = \sqrt{2g\left[\frac{1}{x} + \frac{\lambda - L}{x^2} - \frac{l(l+\lambda-L)}{x^2}\right]} \tag{3*}$$

ahol

$$\lambda = \frac{p_{00}}{g} \tag{4}$$

célszerű rövidítő jelölés.



2. ábra

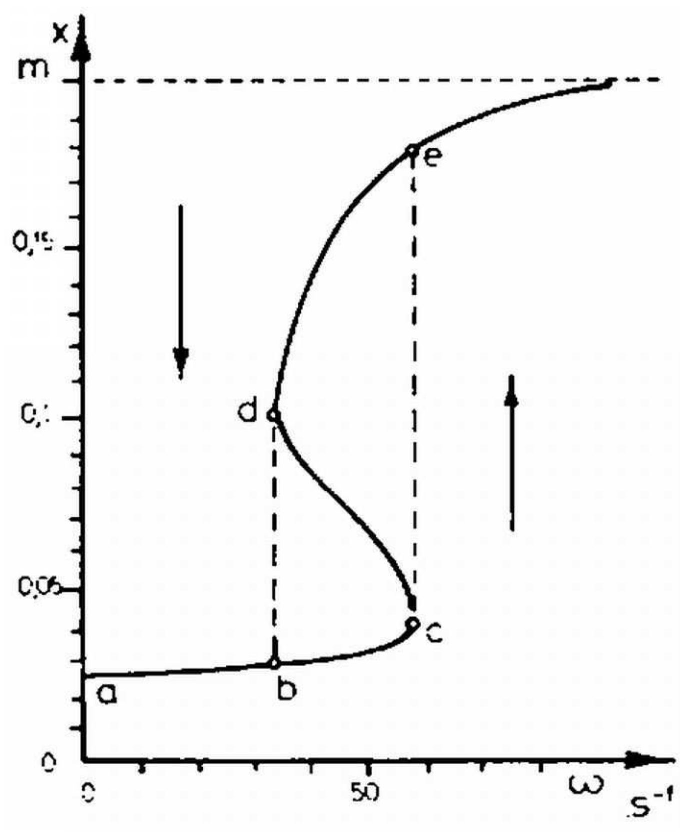
(3) alatti képletünk addig érvényes, amíg a higany pontosan kitölti a cső alsó szárát. Ezután, amikor a higany már a jobb oldali csőbe is behatol, a hidrosztatikai nyomás előjele megfordul és az új egyenlet:

$$(2L-x)\varrho\omega^2 \cdot \frac{x}{2} = p_{00} - \frac{\left[p_{00}-(L-l)\varrho g\right]l}{x} + (x-L)\varrho g.$$

(x-szel itt is a 2. ábrán látható távolságot jelöltük.) Könnyen belátható, hogy a vízszintes szárban levő higany súlypontjának a tengelytől mért távolsága $x/2$ és a vízszintes szárban levő higanyoszlop hossza $2L-x$. Az egyenlet megoldása ω-ra, ismét (4) alkalmazásával:

(5)
$$\omega = \sqrt{2g\left[\frac{1}{2L-x} + \frac{\lambda - L}{(2L-x)x} - \frac{l(l+\lambda-L)}{(2L-x)x^2}\right]}.$$

Az $\omega - x$ függvény értékeit számadataink segítségével a (3*) és az (5) egyenlet alapján néhány pontban kiszámítottuk és a 3. ábrán ábrázoltuk.



3. ábra

A görbe közepének furcsa menete miatt érdemes megoldásunkat kvalitatíve is átgondolni. Ha elkezdjük forgatni a csövet, létre kell hozni a vízszintes szárban levő higanyrészt körpályára kényszerítő centripetális erőt. Ha a higany kijjebb megy a vízszintes csőben, akkor – mivel a körpálya sugarában befelé ható erő (a külső légnyomás) állandó,– sugárirányban a kifelé ható erő csökken, tehát megvan a körmozgást biztosító centripetális erő. Egyre nagyobb ω-hoz egyre nagyobb x tartozik mindaddig, amíg a bezárt levegő nyomásának és a függőleges szárban levő higany hidrosztatikus nyomásának csökkenése az egyre nagyobb centripetális erő növekedést szolgáltatni tudja. A feladatban megadott számadatok szerint ez $x = 0{,}0378$ m-ig tart, amihez $\omega = 58{,}53$ 1/s tartozik. Növeljük tovább ω-t. Ekkor már a sugárirányban kifelé mutató erők csökkenése nem tudja fedezni a körpályán mozgáshoz szükséges centripetális erő növekedést, azaz a higany „átfut” a másik csőszárba. Mint ahogy azt az (5) egyenletből láthatjuk, ebben a helyzetben már tetszőlegesen nagy ω-val forgathatjuk a csövet, x megváltozásával mindig biztosíthatjuk az egyensúlyi helyzetet. Fontos észrevenni, hogy ω folytonos növelésével a görbén a $c-d$ szakasznak megfelelő egyensúlyi állapotok nem érhetők el. Ugyanilyen módon azt is beláthatjuk, hogy nagy ω-ról való fokozatos lassításnál sem jutunk rá a $c-d$ állapotokra.

Ennek ellenére ezek olyan állapotok, amelyek, minthogy a (3) egyenlet jó megoldásai, egyensúlyi helyzetnek felelnek meg. Könnyű megmutatni, hogy el is érhetők. Pl. ha ω folytonos növelésével elértük $x = 0{,}0378$ m-t, akkor nagyobb x értéknél úgy tudjuk csak biztosítani a centripetális erőt, ha ω-t csökkentjük. Mivel ez megtehető, a $c-d$ szakasszal jelölt állapotok is megvalósíthatók. Azonban érezzük, hogy ezek az állapotok mégis mások, mint a többi görbeszakasszal megadottak. Ezt az érzésünket az állapot stabilitásának vizsgálata meg is erősíti. A stabilitáson azt értjük, hogy mi történik akkor, ha a testet valamely állapotában kis zavar éri. Nézzük meg először az $a-c$ szakaszon a stabilitást. Legyen a test valamely $(x_1,\ \omega_1)$ által jellemzett állapotban. Nevezzük (3) jobb oldalát $F(x)$-nek, ekkor

$$(1/2)x_1^2\varrho\omega_1^2 = F(x_1).$$

Valami kis zavar az adott ω_1 szögsebesség mellett kimozdítja a higanyszálat egy $x_1' > x_1$ helyre. Az $(x_1'\omega_1)$-gyel jellemzett körpályához tartozó centripetális erőnél azonban a higanyszálra ható tényleges erő nagyobb, hiszen

$$(1/2)\varrho x_1'^2\omega_1^2 < (1/2)\varrho x_1'^2\omega_1'^2 = F(x_1'),$$

mert nagyobb x-hez nagyobb ω tartozik az $a-c$ szakaszon (ω_1'-vel az x_1'-höz tartozó egyensúlyi szögsebességet jelöltük). A nagyobb $F(x_1')$ erő a higanyszálat visszanyomja eredeti helyére. Hasonló gondolatmenettel belátható az is, hogy $x_1' < x_1$ esetén az $F(x_1')$ kisebb lesz, mint a szükséges centripetális erő és a higanyszál a zavar elmúlta után megint visszamegy az eredeti helyére. Ezek az állapotok tehát stabilak. Nézzük meg, mi történik a $c-d$ szakaszon. Épp a fordítottja mint előbb, hiszen itt nagyobb x-hez kisebb ω tartozik. Vagyis, ha a zavar az egyensúlyihoz képest nagyobb távolságra mozdítja ki a higanyszálat, akkora rá ható erő kisebb lesz, mint a szükséges centripetális erő, tehát még tovább mozdul az adott irányba, ekkor még kisebb lesz az erő stb. A higanyszál eredeti helyére nem tér vissza. Ha a zavar csökkenti x-et, akkor az $F(x)$ nagyobb lesz, mint a szükséges centripetális erő és x-et tovább csökkenti stb. és így most sem tér vissza eredeti helyére. Ez a szakasz tehát instabil, gyakorlatilag igen nehezen megvalósítható, mert a legkisebb zavar esetén egy másik állapotba kerül a rendszer. Vegyük azt is észre, hogy az előbbieket nagyon szemléletesen úgy is elmondhatjuk, hogy ha a rendszer olyan nem egyensúlyi állapotba kerül, ami az egyensúlyi állapotot jelző görbétől jobbra van, akkor az x mindig nőni fog a zavar elmúlta után, míg, ha balra vagyunk az egyensúlyi görbétől, akkor az x csökkenni fog a zavar elmúlta után. Ennek segítségével is végiggondolhatjuk az egyensúlyi helyzetek stabilitását. Az $a-b-c$ állapotok stabilak, mert ha a higany véletlenül kijjebb csúszna, akkor visszanyomódik a görbére, ha beljebb kerülne, akkor visszatolódna a görbén fekvő pont által jelzett állapotba. Ugyanez a helyzet a $d-e-\infty$ darabon, ezek az állapotok is stabilak. A $c-d$ darabon az egyensúlyi helyzet labilis, ha a higany befelé mozdulna el, akkor tovább mozog, amíg a $b-c$ darabon egy stabilis egyensúlyi helyzetig el nem jut, ha kifelé mozdulna el, akkor tovább mozog, amíg a $d-e$ darabon ér el stabilis egyensúlyi helyzetet. Érdekes a c és d pontokkal jelzett állapotok viselkedése. Ha c-ből befelé mozdul el a higany, akkor visszanyomódik c-be, ha kifelé csúszik, akkor eljut e-be. Ha d-ből befelé csúszik el, akkor eljut b-be, de kifelé elmozdulva visszatolódik d-be. (Hasonló esettel foglalkozik az 1981. évi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny I. fordulójának 4. feladata. KML. 63 (1981) 82. old.).

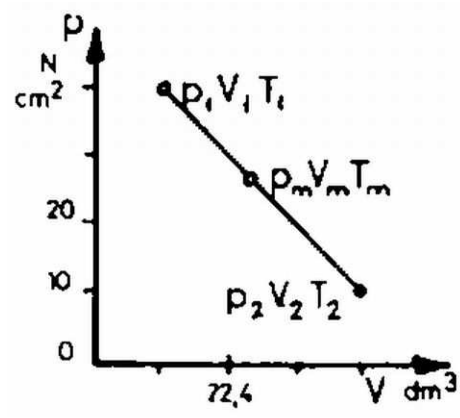
2. 1 mól $p_1 = 40$ newton/cm^2, $V_1 = 11{,}2$ dm^3, $T_1 = 546$ K *adatokkal jellemzett héliumgázt úgy viszünk át a* $p_2 = 10$ newton/cm^2, $V_2 = 44{,}8$ dm^3, $T_2 = 546$ K *adatokkal jellemzett állapotba, hogy a $p-V$ diagramon az állapotot jelző pont egy egyenesen mozogjon (4. ábra). Az állandó térfogat melletti fajhő* $c_V = 12{,}6$ joule/(mól K).

a) *Mennyi a folyamat közben elért T_m legmagasabb hőmérséklet?*

b) *Mennyi az átlagos fajhő a T_1 T_m és a $T_m - T_2$ szakaszon?* *(Vermes Miklós)*

\epsfbox{1982-02-84-1.eps} 4. ábra

Megoldás. *a)* Vegyük észre, hogy az 1. és 2. állapotot jelentő pontok szimmetrikusan feküsznek az első koordinátanegyedet felező 45°-os egyeneshez képest. Mivel $T_1 = T_2$ a két pont ugyanazon az izotermán fekszik. Mindebből következik, hogy a folyamat közben elért legmagasabb hőmérséklethez tartozó izoterma a két pontot összekötő egyenest a közepén érinti. A legmagasabb hőmérséklethez tartozó nyomások és térfogatok a kezdeti és végső állapothoz tartozó értékek számtani középértékei (5. ábra):



4. ábra

$$P_m = \frac{40+10}{2}\ \mathrm{N/cm^2} = 25\ \mathrm{N/cm^2},$$
$$V_m = \frac{11{,}2+44{,}8}{2}\ \mathrm{dm^3} = 28\ \mathrm{dm^3}.$$

Ezután az egyesített gáztörvényből meghatározhatjuk a legmagasabb hőmérsékletet:

$$\frac{40\ \mathrm{N/cm^2}\cdot 11{,}2\ \mathrm{dm^3}}{546\ \mathrm{K}} = \frac{25\ \mathrm{N/m^2}\cdot 28\ \mathrm{dm^3}}{T_m}$$

ahonnan $T_m = 853{,}1\ \mathrm{K} = 580{,}1\ ^\circ\mathrm{C}$.

b) Az I. főtétel szerint a gáz energiájának növekedése egyenlő a gázon végzett munkának és a gázzal közölt hőnek az összegével:

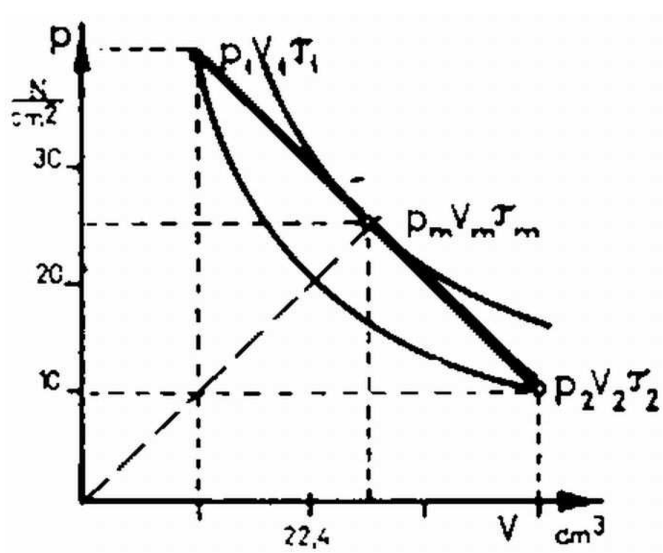
$$\Delta E = \Delta W + \Delta Q.$$

Átrendezve az egyenletet, megkapjuk a közölt hőt:

(1) $$\Delta Q = \Delta Q - \Delta W.$$

Az átlagos fajhő pedig definíciója szerint:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta W}.$$



5. ábra

Az 1. állapottól a maximális hőmérséklet elérésig tartó folyamatban a gáz energiájának növekedése:

(2) $$\Delta E_1 = 1\ \text{mól}\cdot c_V(T_m - T_1) = 3870\ \text{joule},$$

mivel az ideális gáz belső energiája csak az abszolút hőmérséklettől függ.

A munkavégzést pedig, (amely negatív, mert a gáz végezte) a görbe alatti trapéz területe adja meg:

(3) $$\Delta W_1 = -(1/2)(p_1 + p_m)(V_m - V_1) = -5460\ \text{joule}.$$

Behelyettesítve (2)-t és (3)-t (1)-be kapjuk, hogy

$$\Delta Q_1 = 3870 \text{ J} - (-5460 \text{ J}) = 9330 \text{ joule}$$

A hőmérsékletváltozás $\Delta T_1 = T_m - T_1 = 307{,}1$ K.
Az adott folyamatra a T_1 és T_m hőmérsékletek közti átlagos fajhő pedig

$$C_1 = \frac{\Delta Q_1}{\Delta T_1} = 30{,}39 \text{ joule/(mól K)}.$$

A maximumtól a 2-es állapotig tartó folyamatban a gáz energiája ugyanannyival csökken, mint amennyivel előbb nőtt, azaz $\Delta E_2 = -3870$ joule. A munkavégzést az előbbihez hasonlóan számoljuk:

$$\Delta W_2 = -(1/2)(p_m + p_1)(V_2 - V_m) = -2940 \text{ joule}.$$

Ezeket az értékeket (1)-be beírva kapjuk, hogy

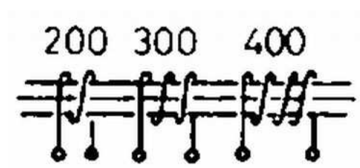
$$\Delta Q_2 = -930 \text{ joule}.$$

Az átlagos fajhő most erre az adott folyamatra:

$$C_2 = \frac{\Delta Q_2}{\Delta T_2} = 3{,}03 \text{ joule/(mól K)}.$$

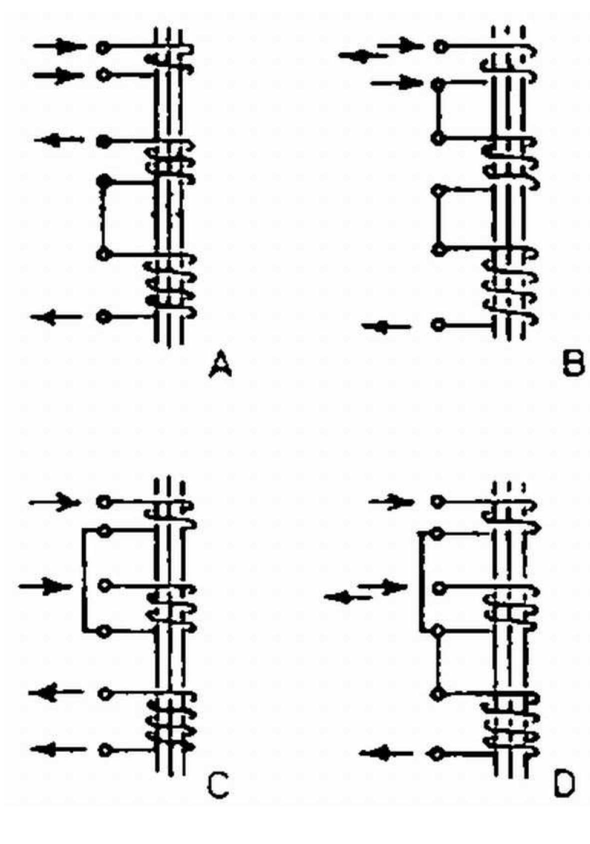
3. *Egy transzformátornak* 200, 300 *és* 400 *menetes tekercsei vannak (6. ábra). Mely kapcsolásban lehet egy adott váltófeszültséget a lehető legnagyobb arányban erősíteni?*

(Károlyházy Frigyes)



6. ábra

Megoldás. Mivel mindegyik tekercsen ugyanaz a fluxus halad át, a transzformátorból kivehető feszültség akkor a legnagyobb, ha a szekunder osztva primer menetszám – hányados a legnagyobb. Ezt a hányadost és így a feszültség-erősítést 4 esetre fogjuk kiszámolni (7. ábra).



7. ábra

Ha a 200 menetes tekercset használjuk primernek és a sorba kapcsolt másik két tekercset szekundernek (7A ábra), akkor az erősítés $(300 + 400) : 200 = 3{,}5$ arányú. Nagyobb erősítést kapunk, ha autotranszformátort készítve a 200-as tekercset is hozzávesszük a szekunderhez (7B ábra), ekkor az erősítés $900 : 200 = 4{,}5$ arányú. Ha a 200-as és 300-as tekercseket ellentétesen kapcsoljuk, 100 menetes primer tekercsnek számítanak (7C ábra), és a 400 menetes szekunder tekercsen 4-szeres feszültség keletkezik. A maximális kivehető feszültséget akkor kapjuk, ha az előbbi kapcsolást úgy módosítjuk, hogy a 400 menetes tekercset autotranszformátor módjára hozzákapcsoljuk a 300 menetes tekercshez (7D ábra). Ekkor a primer tekercsre (az ellentétesen kapcsolt 300 és 200 menetes tekercsek) adott feszültséget 7-szeresére erősíthetjük.

A verseny eredménye

I. díjat nyert *Tokaji Zsolt honvéd*, aki Szegeden a Ságvári Endre Gimnáziumban érettségizett, mint Kovács László tanítványa. II. díjat kaptak egyenlő helyezésben *Mogyorósi András*, a váci Sztáron Sándor Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Skripeczky Gyula) és *Petrovay Kristóf* honvéd, aki a budapesti Ságvári Endre Gimnáziumban érettségizett mint Kulcsár András tanítványa. III. díjat kaptak egyenlő helyezésben *Glück Ferenc* az ELTE fizikus hallgatója,aki a budapesti Apáczai Csere János Gimnáziumban érettségízett mint Holics László tanítványa, *Szállási Zoltán*, az esztergomi Dobó Katalin Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Sipos Imre) és *Tóth Gábor*, a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium III. osztályos tanulója (tanára Horváth Gábor). Dícséretet kaptak egyenlő helyezésben *Guba Kornél*, a kazincbarcikai Ságvári Endre Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Lehotczky Zoltán), *Oszlányi Gábor*, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium IV. osztályos tanulója (tanára Zámborszky Ferenc) és *Palasik Sándor* honvéd, aki a bonyhádi Petőfi Sándor Gimnáziumban érettségizett mint Jurisits József tanítványa.