(1) $$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

I. megoldás. A létezés (exisztencia) bizonyításához elegendő megadni egyetlen olyan függvényt, amely kielégíti a követelményeket. Ilyen az, amelynek zérushelyei a -3, 0, 5 racionális számok:

$$y = x(x+3)(x-5) = x^3 - 2x^2 - 15x,$$

mert a szélsőértékek abszcisszái az

$$y' = 3x^2 - 4x - 15$$

derivált zérushelyei: $-5/3$, $+3$, racionális számok (és így nyilvánvalóan még maguk a szélsőértékek is racionálisak).

Páles Zsolt (Sátoraljaújhely, Kossuth L. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Természetesen bármely racionális r értékkel eltolva a gyökrendszert, az r, $r-3$, $r+5$ zérushelyekkel meghatározott (1) alakú $y = (x-r)(x-r+3)(x-r-5)$ függvénynek is megvan a kívánt tulajdonsága.

2. Az $r = 4$ értékkel adódó 1, 4, 9 gyökrendszerből kiindulva hasonlóan belátható, hogy a $q = 0$ és $q = -1$ értékek kivételével minden racionális q mellett az 1, q^2, $(q+1)^2$ zérushelyekkel meghatározott (1) alakú függvény is megfelelő.

Molnár László (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. Legyenek a függvény zérushelyei: α_1, α_2, α_3 racionálisak, különbözők. Így a szélsőértékek abszcisszáját megadó

(2) $$y' = \big((x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\big)' = 3x^2 - 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1) = 0$$

egyenlet β_1, β_2 gyökei biztosan racionálisak lesznek, ha egyikük 0, azaz ha

(3) $$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = 0,$$

hiszen ekkor

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \frac{2}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3).$$

A (3) szerint egyik α_i-t sem választhatjuk 0-nak, hiszen például $\alpha_3 = 0$ miatt $\alpha_1 a_2 = 0$ lenne, és így nem lehetne mind a három α_i különböző; ugyanezért kettőjük összege sem 0, mert például

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3} \neq 0.$$

Ha mármost α_1 és α_2 céljára két különböző abszolút értékű és 0-tól különböző racionális értéket választunk, akkor velük együtt

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$$

eleget tesz (3)-nak, és ez az α_3 különbözik α_1-től is, α_2-től is, ugyanis például

$$\alpha_1 - \alpha_3 = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1+\alpha_2} \neq 0.$$

Továbbá fennáll $\beta_2 \neq \beta_1$ is, mert

$$\frac{3\beta_2}{2} = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)^2 - \alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} = \frac{\alpha_1^3 - \alpha_2^3}{\alpha_1^2 - \alpha_2^2} \neq 0 = \beta_1.$$

Ezzel megoldottuk a feladatot.

Lux István (Tata, Eötvös J. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. Most egész α_1, α_2, α_3 gyökhármasokat keresünk (1) céljára. Könnyű belátni, hogy a (2) egyenlet diszkriminánsa átalakítással

$$D = 4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 - 12(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) = [2(\alpha_2-\alpha_1)^2 + (\alpha_3-\alpha_2)^2 + (\alpha_3-\alpha_1)^2],$$

és hogy D többszöröse a 4-nek. Ez egyenlő lesz valamely 2γ páros szám négyzetével, ha az

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \lambda, \quad \alpha_3 - \alpha_2 = \mu$$

ismeretlenekre teljesül

(4) $$\lambda^2 + \mu^2 + (\lambda+\mu)^2 = 2(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) = 2\gamma^2.$$

Láttuk az 1439. gyakorlatban,[1] hogy

$$\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2=\left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)^2+3\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^2=\left(\lambda+\frac{\mu}{2}\right)^2+3\left(\frac{\mu}{2}\right)^2, \tag{5}$$

és a két új alak közül legalább az egyikben egész számok négyzetéről van szó. Eszerint az

$$u^2+3v^2=\gamma^2 \tag{6}$$

egyenlet minden egész megoldásából kapunk a (4)-et kielégítő egész λ, μ, γ értékhármast, majd α_1 (egész) megválasztásával egyrészt egész α_2-t, α_3-at, másrészt (2) gyökeiként racionális $\beta_{1,\,2}$ értékeket.

(6)-ra elég relatív prim u, v, γ számhármasokat megadni. Így a

$$3v^2=(\gamma-u)(\gamma+u)$$

alakítás jobb oldala két tényezőjének is relatív prímnek kell lennie. Ezért egyikük teljes négyzet, másikuk egy teljes négyzet 3-szorosa:

$$\gamma-u=q^2,\quad \gamma+u=3r^2,$$

tehát ha q és r páratlan relatív prím számok, akkor megfelel (6)-ban

$$u=\frac{3r^2-q^2}{2},\quad v=qr,\quad \gamma=\frac{3r^2+q^2}{2}.$$

Például $q=1$, $r=3$ mellett $u=13$, $v=3$, $\gamma=14$, majd $\lambda=16$, $\mu=-10$, végül $\alpha_1=-6$ választással $\alpha_2=10$, $\alpha_3=0$, lényegében az I. megoldásban közölt gyökhármasra jutottunk.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III, o. t.)

[1] Lásd K. M. L. 46 (1973) 214. old.