I. megoldás. Mivel a, b, c pozitív számok, így $a+b+c>0$, tehát szorozva az állítás mindkét oldalát $(a+b+c)$-vel, az egyenlőtlenség iránya nem változik meg:

$$a^4+b^4+c^4 \geqq abc(a+b+c) = a^2bc+b^2ac+c^2ab,$$

átrendezve

$$a^4+b^4+c^4-a^2bc-ab^2c-abc^2 \geqq 0.$$

Amennyiben sikerül megmutatnunk, hogy ez az egyenlőtlenség minden a, b, c valós számra fennáll, úgy készen vagyunk.

Ámde a bal oldal így alakítható:

$$\begin{gathered}4a^4+4b^4+4c^4-4a^2bc-4ab^2c-4abc^2=\\ =(a^4-2a^2b^2+b^4)+(b^4-2b^2c^2+c^4)+(c^4-2c^2a^2+a^4)+\\ +(2a^4-4a^2bc+2b^2c^2)+(2b^4-4b^2ca+2c^2a^2)+(2c^4-4c^2ab+2a^2b^2)=\\ =(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+2(a^2-bc)^2+2(b^2-ca)^2+2(c^2-ab)^2.\end{gathered}$$

Így valóban igaz az egyenlőtlenség. Egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha $a^2=b^2=c^2$, azaz a, b, c pozitivitásából, ha $a=b=c$. Ekkor tényleg egyenlőség áll fenn.

II. megoldás. Ismeretes, hogy pozitív számok esetében igaz a következő két egyenlőtlenség:[1]

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqq abc, \tag{1}$$

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right) \geqq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2. \tag{2}$$

A (2)-t az a^2, b^2, c^2 pozitív számokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{3} \geqq \left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^2.$$

Ezt (2) négyzetével összevetve láthatjuk, hogy

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{3} \geqq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)\cdot\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3.$$

Alkalmazva az (1) egyenlőtlenséget, majd a pozitív $(a+b+c)/3$ mennyiséggel átosztva, a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

Mivel (1)-ben, illetve (2)-ben egyenlőség csak az $a=b=c$ esetben lehetséges, így egyenlőség itt is csak $a=b=c$ esetén lehet.

Megjegyzés. Az I. megoldás az a, b, c számokról mindössze annyit használt ki, hogy $a+b+c>0$. Amennyiben ez teljesül, úgy az egyenlőtlenség is áll. Ha csak annyit kötünk ki, hogy $a+b+c>0$ legyen, akkor is szükséges az egyenlőséghez, hogy $a=b=c$ legyen, amit az I. megoldás végén levő gondolatmenet átalakításával kaphatunk meg.

[1] Lásd pl. az Iskolai Függvénytáblázat 242. 61. képletét.