1. Vizsgáljuk meg először, mi jellemzi az ellipszis érintőit. Az ellipszisnek a következő definícióját használjuk: ha adottak a síkon a (nem feltétlenül különböző) F_1, F_2 pontok, és adott egy $2a$ hosszúságú szakasz, a sík azon P pontjainak a mértani helye, amelyekre

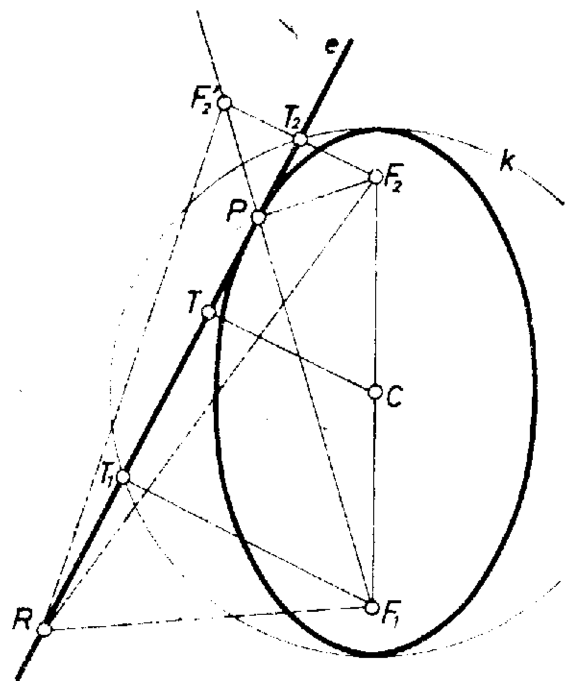
$$F_1P + PF_2 = 2a, \tag{1}$$

az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszis. Ilyen pontok nyilván csak akkor vannak, ha $2a > F_1F_2$. Jelöljük F_1F_2 hosszát $2c$-vel. A sík azon Q pontjai, amelyekre

$$F_1Q + QF_2 < 2a, \tag{2}$$

az ellipszis belsejéhez tartoznak. Könnyen ellenőrizhető, hogy az ellipszis belseje bármely két pontjával azok összekötő szakaszát is tartalmazza. Emiatt azt mondjuk, hogy az ellipszis konvex görbe. Konvex görbék adott P pontbeli érintőjét definiálhatjuk a következő módon: azt mondjuk, hogy a P-n átmenő e egyenes érinti a görbét, ha e-nek nincs a görbe belsejéhez tartozó pontja, de bármely más, P-n átmenő egyenesen van a görbe belsejéhez tartozó pont.

Mivel az F_1F_2 szakasz tetszőleges Q pontjára $F_1Q + QF_2 = F_1F_2 < 2a$, ha egy egyenes metszi az F_1F_2 szakaszt, nem érintheti az ellipszist. Legyen e tetszőleges, az F_1F_2 szakaszt nem metsző egyenes, és legyen az F_1, F_2 pontok e-n levő vetülete T_1, T_2, az F_1F_2 szakasz C felezőpontjának e-n levő vetülete pedig T (1. ábra).



1. ábra

Mivel T felezi a T_1T_2 szakaszt, C a T_1, T_2 pontoktól egyenlő távolságra van, azaz $CT_1 = CT_2$. Megmutatjuk, hogy e akkor és csakis akkor érinti az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszist, ha

$$CT_1 = CT_2 = a. \tag{3}$$

Legyen F_2-nek e-re vonatkozó tükörképe F_2'. Mivel e nem metszi az F_1F_2 szakaszt, biztosan metszi az F_1F_2' szakaszt, jelöljük a metszéspontot P-vel. Felhasználva, hogy CT_2 az $F_1F_2F_2'$ háromszög középvonala, kapjuk, hogy

$$F_1P + PF_2 = F_1P + PF_2' = F_1F_2' = 2CT_2, \tag{4}$$

ha pedig R az e egyenes tetszőleges, P-től különböző pontja, akkor

$$F_1R + RF_2 = F_1R + RF_2' > F_1F_2' = 2CT_2. \tag{5}$$

A kapott (4) és (5) összefüggések együtt azt jelentik, hogy az $F_1R + RF_2$ összeg az e pontjai közül P-re minimális. Ha tehát e érinti az ellipszist, az érintési pont csak P lehet, és így (4) miatt teljesül (3). Ha pedig e-re teljesül (3), akkor (4) miatt P az ellipszisen van, és (5) miatt e-n nincs az ellipszisnek belső pontja. Tetszőleges más, P-n átmenő egyenesre viszont nem P-ben lesz az $F_1R + RF_2$ összeg minimális, van tehát az egyenesen olyan Q pont, amelyre

$$F_1Q + QF_2 < F_1P + PF_2 = 2a,$$

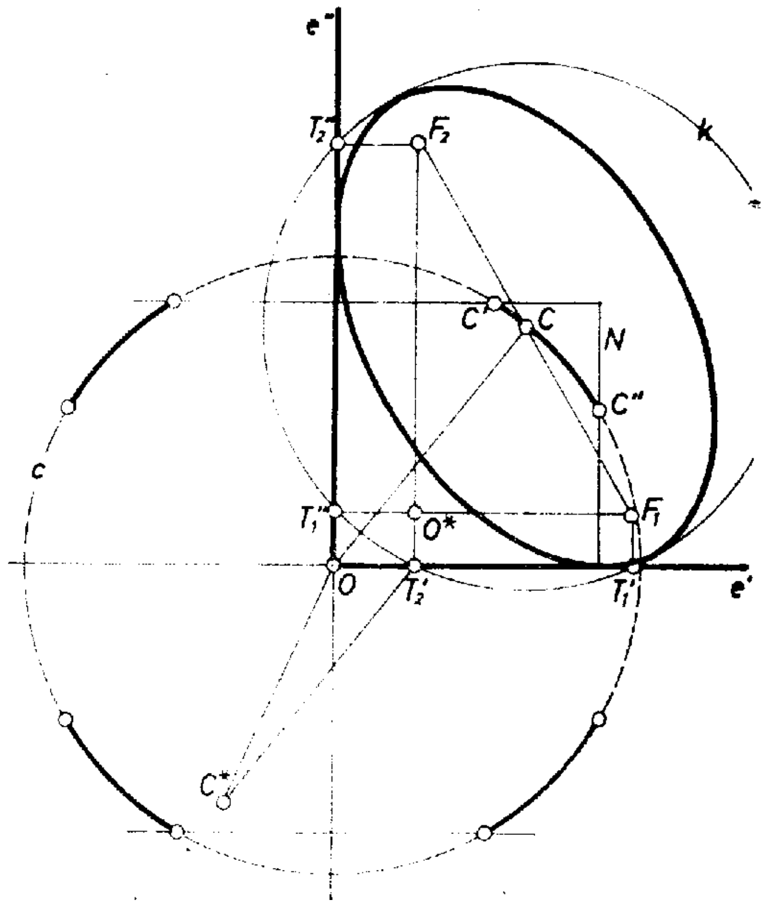
vagyis Q az ellipszis belső pontja.

A C körül a sugárral rajzolt k kört az ellipszis főkörének nevezik. A most bizonyított állítás szavakban a következőket jelenti:

a) Ha valamely egyenes érint egy ellipszist, akkor az ellipszis fókuszainak az egyenesen levő vetületei az ellipszis főkörén vannak.

b) Ha az ellipszis egyik fókuszának egy tetszőleges egyenesen levő vetülete az ellipszis főkörén van, akkor ugyancsak a főkörön van a másik fókusznak az egyenesen levő vetülete is, és az egyenes érinti az ellipszist.

2. Rátérünk a feladatban mondott mértani hely vizsgálatára. Jelöljük a derékszög szárait e'-vel, e''-vel, csúcsát O-val, az ellipszis egy tetszőleges, a feladatban mondott mozgása során felvett helyzetében a fókuszok legyenek F_1 és F_2, az F_1F_2 felezőpontja C, a C körüli a sugarú kör k, az F_1, F_2 pontok e'-n, illetve e''-n levő vetületei T_1', T_2', illetve T_1'', T_2'' (2. ábra).



2. ábra

Az a) állítás szerint a T_1', T_2', T_1'', T_2'' pontok k-n vannak. Jelöljük a C, O pontoknak a $T_1''T_2'$ szakasz felezőpontjára vonatkozó tükörképét C^*-gal, O^*-gal. Ismeretes, hogy egy paralelogrammában az átlók négyzetösszege egyenlő az oldalak négyzetösszegével. Emiatt

$$2(CO^2 + CO^{*2}) = OO^{*2} + CC^{*2}$$
$$2(CT_1^{''2} + CT_2^{'2}) = T_1''T_2^{'2} + CC^{*2}.$$

Mivel $OO^* = T_1''T_2'$, és $CT_1'' = CT_2' = a,\ CO^* = CF_1 = c$, ebből kapjuk, hogy

$$CO^2 = 2a^2 - CF_1^2, \tag{6}$$

vagyis C rajta van az O középpontú, $r = \sqrt{2a^2 - c^2}$ sugarú c körön. Mivel a C középpontú, a sugarú k kör metszi e', e'' egyeneseket, C egyik egyenestől sem lehet a-nál távolabb. Jelöljük a vizsgált síknegyedben levő, az e', e'' egyenesekre támaszkodó a oldalú négyzetet N-nel, c-nek N határán levő pontjait C'-vel, C''-vel. Beláttuk, hogy a vizsgált mértani hely pontjai rajta vannak a c kör N-beli $C'C''$ ívén.

3. Megmutatjuk, hogy a c kör N-beli $C'C''$ ívének tetszőleges C pontja (a C', C'' pontokat is beleértve) a vizsgált mértani helyhez tartozik. Mivel C az N-ben van, a C középpontú, a sugarú k kör metszi az e', e'' egyeneseket, a metszéspontokat jelöljük T_1'-vel, T_2'-vel, illetve T_1''-vel, T_2''-vel, és legyen F_1, illetve F_2 az a pont, melynek T_1', T_1'', illetve T_2', T_2'' az e', e'' egyeneseken levő vetülete (ha e' vagy e'' érinti k-t, T_1' és T_2' vagy T_1'' és T_2'' azonosak). Mivel (6) most is igaz, $CF_1^2 = 2a^2 - CO^2 = c^2$, vagyis az F_1, F_2 pontok távolsága megegyezik a mozgatott ellipszis fókuszainak

a távolságával. Mivel az F_1, F_2 pontoknak az e', e'' egyeneseken levő vetülete rajta van a C középpontú, a sugarú körön, a b) állítás szerint ezek az egyenesek érintik az F_1, F_2 fókuszú, $2a$ nagytengelyű ellipszist. C tehát valóban a vizsgált mértani helyhez tartozik.

4. Ha k nem érinti az e', e'' egyeneseket, a metszéspontok betűzésének megválasztásától függően két különböző helyzetet kapunk az F_1, F_2 fókuszokra, ezek a helyzetek a C-n átmenő, az e', e'' egyenesekkel párhuzamos tengelyekre nézve szimmetrikusan helyezkednek el. Ha nemcsak egy síknegyedre szorítkozunk, a vizsgált mértani hely darabjait a $C'C''$ ívnek az e', e'' egyenesekre, illetve az O pontra való tükrözésével kaphatjuk meg.

Megjegyzés. Feladatunk szoros kapcsolatban van a később kitűzött 1958. feladattal. [1] Állítsunk ugyanis a térben a mozgatott ellipszis fölé annak minden helyzetében olyan kört, amely érinti az ellipszis síkját, és amelynek épp az ellipszis a vetülete. Ez a kör érinti az ellipszis síkjára merőleges, azt az e', e'' egyenesekben metsző síkokat is, tehát az 1958. feladat állítása szerint a középpontja rajta van az O középpontú, $\sqrt{2}\ a$ sugarú gömbön. Mivel a kör alapsíkon levő vetületében a kis- és nagytengely aránya állandó, mozgása közben a kör az alapsíkkal állandó szöget zár be, tehát a középpontja az alapsíktól állandó távolságra van. Emiatt a középpont a rendelkezésre álló gömb helyett annak csak egy körvonalán mozog, és a minket érdeklő mértani hely ennek az alapsíkon levő vetülete.

[1] Megoldása megjelent a KÖMAL 1975/5. szám (50. kötet) 206–207. oldalán.