I. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

1. Az ABC háromszög A csúcsnál levő szöge $70°$. A B és C csúcsnál levő szögek szögfelezőinek metszéspontja legyen D. Mekkora a C csúcsnál levő szög, ha tudjuk, hogy $AD = BD$?

2. Keressük meg az összes olyan természetes számot, amely a tízes számrendszerben négyjegyű, jegyei rendre a, b, c, d, egyik jegy sem 0, továbbá $a + c = b$, $\quad 4 \cdot a \cdot d = c$.

3. Egy körbe írt $ABCD$ szimmetrikus trapéz nem párhuzamos oldalai egyenlőek az egyik alappal ($AD = DC = CB$). A kör DD' átmérője az AB egyenest az E pontban metszi. Bizonyitsuk be, hogy az ADE háromszög egyenlő szárú!

4. A 45 tagú Majmok Tudományos Akadémiája ülést tartott. Ezen az ülésen három kérdést tűztek napirendre, mely fölött szavazással óhajtottak dönteni. A kérdések a következők voltak:

1. Okosabb-e a majom, mint az ember?
2. Szebb-e a majom, mint az ember?
3. Igaz-e, hogy az ember a majom őse?

a) A szavazás után kiderült, hogy az 1. és 3. kérdésre egyaránt 23–23 igen szavazat érkezett, míg a 2. kérdésre csak 17.

b) Az 1. kérdésre igennel válaszolók közül 13-an a 2., 12-en pedig a 3. kérdésre feleltek nemmel.

c) Igent mondott a 2. és 3. kérdésre 6 „akadémikus”, de közülük 2-en az első kérdésre nemmel szavaztak.

Hányan szavaztak mind a három kérdésre nemmel?

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget:

$$\left|1 + \left|\frac{x-4}{5}\right| - x\right| > 3$$

6. Egy konvex négyszög oldalai, mint átmérők fölé, írjunk köröket. Igazoljuk, hogy a négyszög tetszőleges belső pontja legalább az egyik kör határán vagy belsejében van.

7. Igazoljuk. hogy ha p és $p^2 + 8$ törzsszámok, akkor $p^2 + p + 1$ is törzsszám.

8. Számoljunk együtt! Gondolj öt különböző pozitív egész számra, majd vedd a belőlük alkotható, különböző két egész számból álló, tíz darab lehetséges számpárt. Végül pedig a tíz számpár mindegyikében add össze a benne álló két számot, majd az így nyert tíz egész számot közöld velünk. Rövid számolás után mi kitaláljuk az általad gondolt öt számot. Hogyan okoskodhattunk?

II. forduló

Szakközépiskolások feladatai

1. Egy négyjegyű szám valamelyik két jegyét felcserélve az eredeti szám hatszorosát kapjuk. Melyik volt ez a szám?

2. A síkon adott O pontból kiinduló e és f félegyenesek $30°$-os szöget zárnak be. A $30°$-os szögtartomány szögfelezőjén adott egy A és egy B pont, úgy hogy az OB távolság az OA kétszerese. Hányféle úton juthat el az A pontból indított biliárdgolyó a szögtartomány határoló félegyeneseiről visszaverődve (esetleg többször is) a B pontba? (A félegyenesek között a golyó egyenes vonalban halad, visszaverődéskor a fizika törvényei szerint változtat irányt. Feltételezzük, hogy az O pontba érkező biliárdgolyó ott marad az O pontban.)

3. Oldjuk meg a valós számok körében az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\left|x - [2x] + 3\right| \geqq 4$$

(Ahol $[2x]$ a legnagyobb olyan egész számot jelenti, amely nem nagyobb, mint $2x$).

Általános tantervi osztályok feladatai

1. Oldjuk meg a valós számok körében az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\left|x - [2x] + 3\right| \geqq 4$$

(Ahol $[2x]$ a legnagyobb olyan egész számot jelenti, amely nem nagyobb, mint $2x$.)

2. A p, q, r különböző törzsszámokról és az m, n pozitív egészekről azt tudjuk, hogy az $(m+1)$-től $(m+n)$-ig terjedő egész számok egyike sem osztható a p, q, r-től különböző törzsszámmal. Legfeljebb mekkora lehet az n értéke?

3. Az ABC háromszög C csúcsából állítsunk merőlegeseket az A és a B csúcshoz tartozó külső és belső szögfelezőkre. Bizonyítsuk be, hogy a merőlegesek talppontjai egy egyenesen vannak!

Matematika II. tantervű osztályok feladatai

1. Mely n egész számokhoz találhatók olyan x, y, z valós számok, amelyekre $x+y+z=n$ és $x^2+y^2+z^2=n$ teljesül.

2. Vágjunk szét egy négyzetet három egyenessel hét részre úgy, hogy a keletkező sokszögek között egyetlen háromszög legyen. Hány ötszög keletkezhet ebben az esetben?

3. Megegyezik az ált. tantervű osztályok I. feladatával.

I. forduló

Haladók (legfeljebb II. osztályosok)

1. Igazoljuk, hogy ha a és b egész számok és az $(a^2+b^2)^3-(a^6+b^6)$ osztható 9-cel, akkor vagy a vagy b osztható 3-mal!

2. Egy 3×3-as táblázatba különböző számjegyeket írtunk úgy, hogy a sorokból (balról jobbra) és oszlopokból (felülről lefelé) kiolvasható hat darab, tízes számrendszerbeli háromjegyű szám mind osztható hattal. Mutassuk meg, hogy a hat szám közül pontosan egy osztható öttel!

3. Melyek azok a pozitív egész számok, amelyek nem állíthatók elő $ab+a+b$ alakban, ahol a és b pozitív egészek?

4. Az egymilliónál nem nagyobb pozitív egészek között hány olyan van, amely a 2, 3, 5 számok közül pontosan kettővel osztható?

5. Igazoljuk, hogy azok a rombuszok, amelyeknek csúcsai egy téglalap különböző oldalegyenesein vannak, hasonlók!

6. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész n számot, amelyre n^4+n^2 maradék nélkül osztható $(2n+1)$-gyel!

7. Oldjuk meg az

$$\left[\sqrt{x^2+14x+49}-2\right]=-x-4{,}5$$

egyenletet $\big([a]$ jelöli a legnagyobb, a-nál nem nagyobb egész számot!$\big)$.

8. Az $ABCD$ konvex négyszög CD oldalegyenesére a D, valamint a C csúcsban állított merőlegesek P, illetve Q pontban metszik az AB oldalegyenest. Bizonyítsuk be, hogy ha $AQ=QC$ és $BP=PD$, akkor $ABCD$ húrnégyszög!

II. forduló

Szakközépiskolások feladatai

1. Egy 24 egység területű konvex négyszöget átlói négy olyan háromszögre vágnak, melyek közül az egyik területe 3, egy másiké 5 egység. Mekkora területű a további két háromszög?

2. Tegyük fel, hogy $0<\alpha,\,\beta<\dfrac{\pi}{2}$ és $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=8$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$(\operatorname{tg}\,\alpha+\operatorname{ctg}\,\beta)^2+(\operatorname{tg}\,\beta+\operatorname{ctg}\,\alpha)^2\geqq\frac{289}{8}.$$

3. Egy háromszög belsejében véges sok pontot veszünk fel, amelyek közül semelyik három sincs egy egyenesen. Ezeket egymással és a háromszög csúcsaival kötjük össze úgy, hogy semelyik két szakasz se messe egymást és a szakaszok a háromszöget kis háromszögekre bontsák. Igazoljuk, hogy az így keletkezett háromszögek száma mindig páratlan!

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Egy baráti összejövetelen, ahol legalább három házaspár volt jelen, bármely három házaspárból vagy az asszonyok, vagy a férjek ismerik egymást. Elhelyezhetők-e a párok két teremben úgy, hogy az első teremben bármely két asszony, a második teremben pedig bármely két férj ismerje egymást?

2. Egy konvex n-szög csúcsai közül válasszuk ki azt a hármat, amelyik a legkisebb területű háromszöget határozza meg. Bizonyítsuk be, hogy a kapott háromszög két oldala a konvex n-szögnek is oldala.

3. Az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ sorozatot a következő módon képeztük: a_1, a_2, a_3 pozitív egészek, $a_3<2a_2+a_1$, $a_n=4a_{n-1}-3a_{n-2}-2a_{n-3}$ $(n=4,\ 5,\ \ldots)$.
Bizonyítsuk be, hogy $a_{1000}>2^{999}$.

A szakosított matematika II. tantervű osztályok feladatai

1. Az ABC háromszög körülírt körének egy M pontjából bocsássunk merőlegest az AB és AC oldalegyenesre, legyenek a talppontok K és L. Hogyan kell megválasztani az M pontot, hogy a KL távolság maximális legyen?

2. Hány különböző szám található az alábbi sorozatban:

$$\left[\frac{1^2}{1982}\right], \quad \left[\frac{2^2}{1982}\right], \quad \left[\frac{3^2}{1982}\right], \quad \ldots, \quad \left[\frac{1982^2}{1982}\right]$$

(Itt $[x]$ az x szám egész részét jelöli.)

3. Megegyezik az ált. tantervű osztályok 3. feladatával.