I. forduló

1. Hány olyan tízes számrendszerbeli n-jegyű szám van, amelynek jegyei között előfordul az egyes?

2. Egy rombusz átlóinak hossza 6 és 8 egység. A rombuszba olyan szabályos háromszöget írunk, amelynek egy csúcsa a rombusz rövidebb átlójának egyik végpontja, egy oldala pedig párhuzamos a rombusz hosszabbik átlójával. Milyen hosszú ennek a háromszögnek a magassága?

3. Oldjuk meg a következő egyenletet, amelyben a és b pozitív paraméterek:

$$\left(x^3 + a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{9}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(a^3 + a^{\frac{9}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = b.$$

4. Adott az $ABCDEFGH$ kocka, „alaplapja" legyen az $ABCD$ négyzet, erre merőleges élei pedig rendre AE, BF, CG és DH. Mekkora szöget zár be az ACE és CEF félsík?

5. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög oldalainak négyzetei akkor és csak akkor egymást követő elemei egy számtani sorozatnak, ha a súlyvonalak négyzetei is egy számtani sorozat egymást követő elemei.

6. Hány megoldása van az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 48$$

egyenletnek a nemnegatív egész számok körében, ha még azt is megkívánjuk, hogy

$$x_1 > 5, \quad x_2 > 6, \quad x_3 > 7, \quad \text{és} \quad x_4 > 10 \quad \text{legyen.}$$

7. Adjunk meg olyan f függvényt, amely minden valós számra értelmezve van, és minden valós értéket pontosan kétszer vesz fel.

8. Az egységsugarú körbe írt ABC háromszög beírt körének középpontja K. Bizonyítsuk be, hogy ha $KA \cdot KB \cdot KC = 1$, akkor az ABC háromszög szabályos.

II. forduló

A szakközépiskolák és a gimnáziumok általános tantervű III–IV. osztályos tanulói részére

1. Jelentsen n pozitív egész számot, és legyen $a_n = n^2 + n + 1$. Bizonyítsa be, hogy az (a_n) sorozatnak végtelen sok olyan eleme van, amely egyenlő ugyane sorozat másik két elemének szorzatával!

2. A Σ síkban fekvő ABC háromszögről a következőket tudjuk:
a) $BC = a$ oldala rögzített;
b) $AD = s_a$ súlyvonalának hossza (D tehát a BC oldal felezőpontját jelöli), mértani közepe a $CA = b$ és $AB = c$ oldalak hosszának.
Határozza meg a Σ sík összes olyan pontját, amely az ABC háromszög A csúcsa lehet!

3. Az O középpontú, egységsugarú körben rögzítjük az AC átmérőt, majd ugyancsak rögzítjük ennek az átmérőnek egy tetszés szerinti P belső pontját. A P ponton átmenő BD húrok közül melyikre lesz legnagyobb az $ABCD$ húrnégyszög területe?

A gimnáziumok matematika I. szakosított tantervű osztályainak III-IV. osztályos tanulói részére

1. Egy négyzetet kilenc egyenes mindegyike két olyan négyszögre bont, amelyek közül az egyik területe a másik háromszorosa. Bizonyítsuk be, hogy van olyan pont, amelyikre a kilenc egyenes közül legalább három illeszkedik!

2. A $b = 3k + 1$ alapú számrendszerben hány olyan xyz_b háromjegyű szám van, amelyben a jegyek különbözők, egyik sem nulla, és a jegyek ciklikus cseréjével adódó : xyz_b, yzx_b, zxy_b számok a felírt sorrendben számtani sorozatot alkotnak?

3. Az f függvény értéke az $x \geqq 0$ valós helyen $\sum_{n \in H} \left[\sqrt{\frac{x}{n}}\right]$, ahol H azoknak a pozitív egész számoknak a halmaza, amelyek nem oszthatók 1-nél nagyobb négyzetszámmal, $[z]$ pedig a z-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobbat jelöli.
Határozzuk meg $f(1982)$ értékét, és a függvény $0 \leqq x \leqq 1982$ intervallumhoz tartozó értékkészletét!

A gimnáziumok matematika II. szakosított tantervű III–IV. osztályos tanulói részére

1. Keressük meg mindazokat a pozitív egészekből álló x, y, z számhármasokat, amelyek a következő tulajdonságúak: a számhármas bármelyik tagja osztója annak a számnak, amely eggyel nagyobb a másik kettő szorzatánál!

2. Vegyünk fel négy egységvektort a térben és tekintsük azt a 16 összegvektort, amelyek úgy állnak elő, hogy az egységvektorokat egymástól függetlenül tetszőlegesen $(+1)$-gyel, vagy (-1)-gyel szorozzuk, majd összeadjuk őket. Mutassuk meg, hogy az összegvektorok között van 2-nél hosszabb és 2-nél rövidebb is!

3. Bizonyítsuk be, hogy a négyzetrácson elhelyezhető egy r sugarú kör úgy, hogy a körvonaltól minden rácspont távolsága legalább $\frac{1}{13r}$ legyen ! (Négyzetrácson azoknak a pontoknak a halmazát értjük, amelyek mindkét koordinátája egész.)