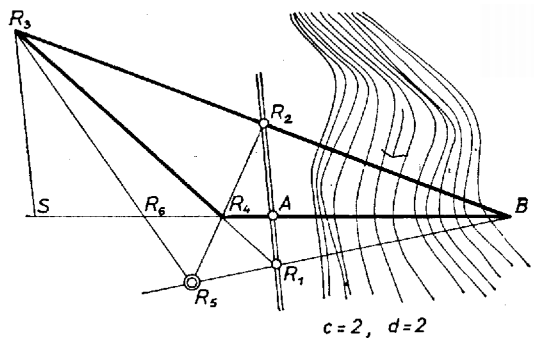
I. megoldás. A jelzőrudak letűzésére mondottak szerint az $R_1, \ldots, R_6$ pontok mindegyike létrejött. Föltesszük, hogy R_2 az R_1-től is, R_3-tól is különböző, így a további pontok is különbözők.

1. Húzzunk párhuzamost R_3-on át AR_1-gyel és jelöljük AB-vel való metszéspontját S-sel.



1. ábra

Ekkor a párhuzamos szelők tételei alapján

$$\text{egyrészt } \frac{R_4R_1}{R_1R_3} = \frac{R_4A}{AS}, \text{ másrészt } \frac{R_3R_2}{R_2B} = \frac{SA}{AB}.$$

Írjuk fel még a következő azonosságot:

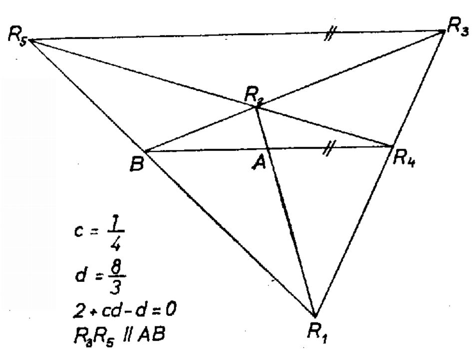
$$\frac{BA}{AR_4} = \frac{BA}{AR_4},$$

szorozzuk össze e három egyenlőség bal, illetve jobb oldalait, és változtassuk meg a jobb oldalon a nevező tényezőinek sorrendjét az alábbiak szerint:

$$(1)\qquad \frac{BA}{AR_4} \cdot \frac{R_4R_1}{R_1R_3} \cdot \frac{R_3R_2}{R_2B} = \frac{BA \cdot R_4A \cdot SA}{AR_4 \cdot AS \cdot AB} = \frac{BA}{AB} \cdot \frac{R_4A}{AR_4} \cdot \frac{SA}{AS} \qquad (= -1).$$

Ezt az összefüggést ismételten fel fogjuk használni, ezért továbbhaladás előtt értelmezni fogjuk. Ha az AB egyenesen valamelyik irányt pozitívnak, a vele ellentétes irányt negatívnak vesszük, akkor a jobb oldal értéke (-1), hiszen mindhárom tényezője (-1).

A bal oldalt értelmezzük így: a BR_4R_3 háromszöget átmetszettük az AR_1R_2 egyenessel, vettük a háromszög BR_4, R_4R_3, R_3B oldalegyenesén rendre adódott A, R_1, R_2 metszésponttól az illető oldalszakasz végpontjaiig terjedő szakaszok arányát, majd e 3 arány szorzatát.



2. ábra

Az egyes oldalegyeneseken levő két szakaszból úgy képeztük az arányt, hogy a háromszög oldalait a csúcsok B, R_4, R_2 sorrendjében jártuk be, és mindegyik egyenesen a kezdőponttól a metszéspontig terjedő szakaszt osztottuk a metszésponttól a végpontig terjedő szakasszal. Így ábránk esetében az R_4R_1 szakasz a menetiránnyal ellentétes, ezért negatívnak vesszük, a többi 5 szakasz pozitív, megegyezésben a jobb oldal (-1)-es értékével.

Eredményünk természetesen bármely háromszögnek bármely egyenessel való átmetszésére érvényes, hacsak az egyenes nem megy át a háromszög egyik csúcsán sem. Az összefüggést *Menelaos tételé*nek nevezik.

2. Alkalmazzuk Menelaos tételét az R_5R_4 egyenessel kettévágott BR_4R_3 háromszög R_4R_2B és $R_4R_2R_3$ részeire, szelőnek az első részháromszög esetében az R_5R_3 egyenest véve, a másodikéban az R_5B-t:

$$\frac{R_4R_5}{R_5R_2} \cdot \frac{R_2R_3}{R_3B} \cdot \frac{BR_6}{R_6R_4} = -1, \qquad \frac{R_4R_5}{R_5R_2} \cdot \frac{R_2B}{BR_3} \cdot \frac{R_3R_1}{R_1R_4} = -1.$$

Az előbbit az utóbbival osztva, valamint négy szakaszt a (-1)-szeresével pótolva, egyszerűsítve

$$(2) \qquad \frac{BR_6}{R_6R_4} \cdot \frac{R_4R_1}{R_1R_3} \cdot \frac{R_3R_2}{R_2B} = 1.$$

(Ezt az összefüggést általános érvénnyel az 1. megjegyzésben értelmezzük.)

Képezve (1) és (2) hányadosát, a 2. és 3. arányok hányadosa 1, így

$$(3) \qquad \frac{BA}{AR_4} \cdot \frac{R_6R_4}{BR_6} = -1,$$

és itt mindegyik szakasz az AB egyenesnek a része, mérhető, ill. kifejezhető az AB ismeretlennel: $BR_6 = BA \pm AR_6$, így az egyismeretlenes egyenletből

$$BA = \frac{\mp AR_4 \cdot AR_6}{R_6R_4 - AR_4}, \qquad |BA| = \frac{AR_4 \cdot AR_6}{|AR_4 - R_4R_6|},$$

amit bizonyítanunk kellett.

Megjegyzések. 1. A (2) összefüggést *(Ceva tétele)* így értelmezzük: a BR_4R_3 háromszög oldalegyeneseinek, valamint a síkja R_5 pontját a csúcsokkal összekötő egyeneseknek metszéspontját rendre R_6-tal, R_1-gyel, R_2-vel jelölve, az oldalakon keletkezett szakaszpárokból képezett arányok szorzata 1, a szakaszok sorrendjét, irányát ugyanúgy értve, mint a Menelaos-tétel esetében.

2. Akik foglalkoztak az ún. *projektív geometria* elemeivel,[1] azok bizonyára fölismerik: az $R_1, \ldots, R_6$ pontokat úgy jelöltük ki, hogy B és R_4 az R_1, R_2, R_3 és R_5 pontokkal meghatározott *teljes négyszög*nek ún. átlós pontjai legyenek. Így a BR_4 egyenes a teljes négyszög egymással szemben fekvő R_1R_2 és R_3R_5 oldalegyeneseit az A, R_6 pontokban metszi, és az erre az alakzatra vonatkozó alaptétel szerint a B, R_4 és A, R_6 pontpárok harmonikusan választják szét egymást, amin ezt értjük:

$$\left(\frac{BA}{AR_4}\right) : \left(\frac{BR_6}{R_6R_4}\right) = -1.$$

(A *teljes* négyszögnek 6 oldalegyenese van, bármelyik 2 csúcsát összekötő egyenesét oldalegyenesének nevezzük, továbbá 3 átlós pontja, amelyekben $2-2$ szemben fekvő (közös csúcsot nem tartalmazó) oldalegyenes metszi egymást.) – Ezek ismeretében azonnal felírhattuk volna (3)-at. – Az eljárás kidolgozói természetesen ismerték ezt a hátteret.

II. megoldás. Vektorok felhasználásával bizonyítjuk az állítást. Legyen

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{a}, \quad \overrightarrow{AR_1} = \mathbf{r}, \quad \overrightarrow{AR_2} = -c\mathbf{r},$$
$$\overrightarrow{BR_3} = d \cdot \overrightarrow{BR_2} = d(\mathbf{a} - c\mathbf{r}),$$

ahol $\mathbf{r}$ nem párhuzamos $\mathbf{a}$-val, c és d számok, $c \neq 0$ és $c \neq 1$, illetve $d > 0$ és $d \neq 1$. Így az R_1R_3 egyenes tetszőleges X pontjára valamely e számmal

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BX} &= \overrightarrow{BR_1} + e\overrightarrow{R_1R_3} = \overrightarrow{BR_1} + e(\overrightarrow{BR_3} - \overrightarrow{BR_1}) = \\ &= (1-e)\overrightarrow{BR_1} + e\overrightarrow{BR_3} = (1-e)(\mathbf{a} + \mathbf{r}) + de(\mathbf{a} - c\mathbf{r}) = \\ &= (1 - e + de)\mathbf{a} + (1 - e - cde)\mathbf{r}.\end{aligned}$$

X akkor és csak akkor azonos R_4-gyel, ha a $\overrightarrow{BX}$ egyirányú a $\overrightarrow{BA}$-ral, vagyis $\mathbf{r}$ együtthatója 0:

$$1 - e - cde = 0, \qquad \text{tehát} \qquad e = \frac{1}{1 + cd},$$

és ekkor

$$\overrightarrow{BR_4} = \frac{(c+l)d}{1+cd}\mathbf{a},$$

hacsak $cd \neq -1$. A $cd = -1$ értéket a jelzőrudak helyzetére tett föltevések kizárják. Ekkor ugyanis $d > 0$ miatt $c < 0$, R_2 ugyanazon az oldalán van AB-nek, mint R_1, az R_3-on átmenő, AR_1-gyel párhuzamos egyenesnek R_3-tól AB-ig terjedő R_3Q szakasza $R_3Q = d \cdot R_2A = d \cdot |c| \cdot R_1A = R_1A$, tehát R_1R_3 párhuzamos AB-vel, R_4 nem jön létre.

Hasonlóan az R_2R_4 egyenes bármely X pontjára valamely f számmal

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BX} &= \overrightarrow{BR_2} + f \cdot \overrightarrow{R_2R_4} = (1-f)\overrightarrow{BR_2} + f \cdot \overrightarrow{BR_4} = \\ &= \left(1 - f + \frac{(c+1)df}{1+cd}\right)\mathbf{a} - c(1-f)\mathbf{r},\end{aligned}$$

[1] Lásd pl.: *Vigassy Lajos:* Projektív geometria (Középiskolai Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.

és X arra és csak arra az f-re azonos R_5-tel, amelyre egy alkalmas g számmal

$$\overrightarrow{BX} = g\overrightarrow{BR_1} = g\mathbf{a} + g\mathbf{r},$$

azaz

$$g = 1 - f + \frac{(c+1)df}{1+cd} = -c(1-f).$$

Innen $c + 1 \neq 0$ figyelembevételével

$$f = \frac{1+cd}{1+cd-d}, \quad \overrightarrow{BR_5} = \frac{cd}{1+cd-d}\ (\mathbf{a}{+}\mathbf{r}),$$

hacsak $1 + cd - d \neq 0$. Az ellentétes esetben az R_2R_4 egyenesen nem volna olyan X, melyre BX párhuzamos volna BR_1-gyel, tehát $R_2R_4||BR_1$ lenne, nem lenne R_5, és ezt kizártuk.

Végül az R_3R_5 egyenes bármely X pontjára valamely h számmal

$$\overrightarrow{BX} = BR_3 + h \cdot \overrightarrow{R_3R_5} = d\left(1 - h + \frac{ch}{1+cd-d}\right)\mathbf{a} + cd\left(h - 1 + \frac{h}{1+cd-d}\right)\mathbf{r},$$

és X akkor és csak akkor azonos R_6-tal, ha $\mathbf{r}$ együtthatója 0, azaz

$$h = \frac{1+cd-d}{2+cd-d}, \qquad \text{és így} \quad \overrightarrow{BR_6} = \frac{(c+1)d}{2cd-d}\ \mathbf{a}.$$

(A fentebbiekhez hasonlóan belátható, hogyha $2 + cd - d = 0$, akkor R_6 nem jön létre, 2. ábra.)

Mármost eredményeinkből az állításban szereplő szakaszok hossza

$$AR_4 = \frac{d-1}{1+cd}|\mathbf{a}|, \quad AR_6 = \frac{2(d-1)}{2+cd-d}|\mathbf{a}|,$$
$$|R_4R_6 - AR_4| = |AR_6 - 2AR_4| = \frac{2(d-1)^2}{(1+cd)(2+cd-d)}|\mathbf{a}|,$$

és ezek szerint az (1) kifejezés abszolút értéke $|\mathbf{a}| = AB$, amint azt bizonyítanunk kellett.