Havonta egy-egy, számomra valamilyen oknál fogva kedves feladatot mondok el. Ezek megoldása, noha a középiskolában oktatott ismeretanyagnál többet nem kíván, mégis mély, igazi matematikusi gondolkodást igényel. A problémákra a megjelenést követő számban megoldást adok, azonban nem kívánok egyetlen problémát sem teljesen lezárni. Akár a feladatokkal, akár azok megoldásával kapcsolatban mindenfajta megjegyzést örömmel veszek.

Csirmaz László

*

Ha adott n egész számunk ($n \geqq 2$), akkor közülük mindig kiválasztható néhány (lehet, hogy csak egy), melyek összege osztható n-nel. Ez egy jól ismert „skatulya elves” feladat, általában semmit nem lehet mondani arról, hogy a kapott összeg hány tagú. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan is veszünk $2n-1$ darab egész számot, mindig kiválasztható közülük pontosan n, melyek összege osztható n-nel!

***

Jól ismert, hogy különböző pozitív egész számok reciprokaink összegeként akármilyen nagy számnál nagyobbat kaphatunk. Ezt a tényt másképpen úgy fejezzük ki, hogy az ún. harmonikus sor:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

divergens. Bizonyitsuk be, hogy ha csak azokat a pozitív egész számokat tekintjük, melyek tízes számrendszerbeli alakjában nem szerepel nulla, ezek reciprokainak összege kisebb egy korlátnál.

Annak bizonyítása, hogy a harmonikus sor divergens, például a következőképpen történhet. Az 1, 1/2, 1/3, …, 1/9 számok mindegyike nagyobb 1/10-nél, tehát

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{9}>9\cdot\frac{1}{10}.$$

Az 1/10, 1/11, …, 1/99 számok mindegyike nagyobb 1/100-nál, ezért

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{99}>9\cdot\frac{1}{10}+90\cdot\frac{1}{100}=2\cdot\frac{9}{10}.$$

Általában ugyanezért

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{10^n-1}>9\cdot\frac{1}{10}+90\cdot\frac{1}{100}+\ldots+9\cdot 10^{n-1}\cdot\frac{1}{10^n}=n\cdot\frac{9}{10}.$$

Így valóban, különböző természetes számok reciprokainak összegeként akármilyen nagy számot elő tudunk állítani.

A feladat állítását is hasonló módszerrel bizonyítjuk. Mivel a nullát nem tartalmazó n jegyű számokból pontosan 9^n darab van (minden helyi értéken a kilenc lehetséges számjegy bármelyike előfordulhat), s ezeknek a számoknak az értéke nagyobb 10^{n-1}-nél, ezért reciprokaik összege kisebb, mint $9^n/10^{n-1}$. Most ha veszünk véges sok különböző pozitív egészet, melyek egyike sem tartalmazza a nulla számjegyet, és közülük a legnagyobb éppen n jegyű, akkor reciprokaik összege legfeljebb

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}+\ldots+\frac{1}{10^n-1}<9+\frac{9^2}{10}+\ldots+\frac{9^n}{10^{n-1}}. \tag{1}$$

Felhasználva azt, hogy $0<x<1$ esetén

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}<\frac{1}{1-x}$$

kapjuk, hogy (1) jobb oldalának értéke

$$9\left(1+\frac{9}{10}+\ldots+\left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\right)<9\cdot\frac{1}{1-9/10}=90.$$

Így akárhány ilyen szám reciprokát is tekintjük, ezek összege sohasem haladhatja meg a 90-et. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

Érezhető, hogy a most kapott felső korlát eléggé elnagyolt becslés, és a reciprokok összege meg sem közelítheti a 90-et. Valóban, ha az összes, legfeljebb ötjegyű, nulla jegyet nem tartalmazó egész reciprokát adjuk össze, az összeg mindössze 9,83 körüli, s minden további tag hozzáadása is legfeljebb 0,000 01-gyel változtatja meg ezt az értéket. Azt gondolhatnánk tehát, hogy ez a 9,83 már nagyon közel van a lehető legjobb felső korláthoz, és például az összegek 10 fölé már nem is kerülhetnek. Ez azonban *nem így van,* itt érvényes a „sok kicsi sokra megy” elve. A legjobb felső korlát pontos megbecslése egyáltalán nem könnyű feladat. A legegyszerűbb módszer, vagyis az, hogy addig adogatjuk össze a reciprokokat, míg az összeg már „csak nagyon kicsit változik”, nem működik: a 25 (huszonöt!) jegyű számok reciprokait is figyelembe véve az összeg még mindig több mint eggyel kisebb a pontos értéknél, mely 5 tizedes jegyre 23,103 45.