

Hány nevezetes pontja legyen a háromszögnek?*

(Fordította Láng Hugó)

1. A nevezetes pontok száma és tulajdonságai

A háromszögben a súlypontot (S), a körülírt kör középpontját (K), a beírt kör középpontját (O) és a magasságpontot (M) szokás nevezetes pontnak mondani. Ezek mindegyike három-három nevezetes egyenes metszéspontja: S a súlyvonalak, K az oldalfelező merőlegesek, O a szögfelezők, M pedig a magasságvonalak közös pontja. Joggal kérdezhető azonban, miért csak ezeket mondjuk nevezetesnek, nem lehet-e valamilyen természetes módon további pontokat közéjük sorolni?

Vegyük először szemügyre a háromszög nevezetes egyeneseit, és próbáljuk meg rendszerezni a tulajdonságaikat.¹ Négy nevezetes tulajdonságot találunk, ezek mind az egyeneseknek a háromszög valamelyik csúcsához vagy a vele szemközt levő oldalához való viszonyát határozzák meg:²

- T_1 – az egyenes átmegy a csúcson;
- T_2^* – az egyenes felezi a csúcsnál levő szöget;³
- T_3 – az egyenes merőleges a szemközti oldalra;
- T_4 – az egyenes felezi a szemközti oldalt.

Mindegyik nevezetes vonal ezek közül kettővel rendelkezik: a súlyvonal T_1 -gyel és T_4 -gyel, az oldalfelező merőleges T_3 -mal és T_4 -gyel, a szögfelező T_1 -gyel és T_2^* -gal, a magasságvonal T_1 -gyel és T_3 -mal. De kimerítettük-e ezzel az összes lehetőséget? A négy tulajdonságból pusztán kombinatorikailag hat pár képezhető: $T_1T_2^*$, T_1T_3 , T_1T_4 , $T_2^*T_3$, $T_2^*T_4$, T_3T_4 . A baj csak az, hogy a hiányzó $T_2^*T_3$, $T_2^*T_4$ párok valójában három tulajdonságot jelentenek: T_2^* és T_3 együtt azt kívánná, hogy az egyenes menjen át egy csúcson, felezze az ott levő szöget, és legyen merőleges a szemközti oldalra, T_2^* és T_4 pedig azt, hogy az egyenes menjen át egy csúcson, felezze az ott levő szöget, és felezze a szemközti oldalt. Azon nem tudunk segíteni, hogy egy egyenes általában vagy felezi a háromszög két oldala közti szöget, vagy merőleges a harmadik oldalra. De ha nem tesszük bele T_2 -be T_1 -et, akkor T_2 és T_4 már előfordulhat együtt. Legyen tehát T_2 a következő tulajdonság:

T_2 – az egyenes ugyanakkora szöget zár be a csúcson átmenő oldalakkal.

T_2 tehát önmagában csak azt követeli meg, hogy az egyenes párhuzamos legyen a szögfelezővel és csak T_1 -gyel együtt jelenti azt, hogy azonos is legyen vele. T_2 és T_4 így már nem zárják ki egymást. Együttes előfordulásuk egy ötödik nevezetes vonal bevezetését teszi lehetővé: ez az az egyenes, amelyik egyállású a szokásos szögfelezővel és illeszkedik a szemközti oldal felezőpontjára. Nevezzük ezt az egyenest oldalfelező szögfelezőnek. Látni fogjuk, hogy az általános háromszög oldalfelező szögfelezői egy ponton mennek át (1. tétel), ezt a pontot F -fel jelöljük, magukat az oldalfelező szögfelezőket pedig f_a -val, f_b -vel, f_c -vel.

Állítsuk párba a fenti tulajdonságokat úgy, hogy T_1 -nek T_4 , T_2 -nek T_3 legyen a párja! Ezáltal az öt nevezetes vonal is párba állítható:

T_1T_2 – szögfelező	párja	T_4T_3 – oldalfelező merőleges
T_1T_3 – magasságvonal	párja	T_4T_2 – oldalfelező szögfelező
T_1T_4 – súlyvonal	párja	T_1T_4 – súlyvonal
T_2T_4 – oldalfelező szögfelező	párja	T_3T_1 – magasságvonal
T_3T_4 – oldalfelező merőleges	párja	T_2T_1 – szögfelező

A T_2T_3 pár továbbra sem valósítható meg, itt lyuk marad a rendszerben. De mégis olyan rend keletkezett, amely korábban nem volt meg. T_1 és T_4 háromszor, T_2 és T_3 kétszer fordul elő, emiatt az ötféle egyenes közül egy-egy csúcson három megy át és ugyancsak három felez egy-egy oldalt. Két nevezetes egyenes merőleges egy-egy oldalra és ugyancsak kettő zár be két-két oldallal egyenlő szögeket. Rendszerünkben egyfajta megfeleltetés, dualitás mutatkozik T_1 és T_4 , valamint T_2 és T_3 között. Ha minden T_1 -et és T_4 -et, illetve T_2 -t és T_3 -at felcserélünk egymással a táblázatban, akkor minden egyenes átmegy az ebben értelemben vett duálisába. A szögfelezőnek így az oldalfelező merőleges felel meg, a magasságvonalnak az oldalfelező szögfelező, és megfordítva. A súlyvonal duálisá önmaga. Látni fogjuk, hogy ez a kapcsolat még további összefüggéseket rejt magában. (Meg kell azonban jegyezni, hogy itt szó sincs a projektív

*Megjelent a *Praxis der Mathematik* 1967. évi 9. számában.

¹Vizsgálataink közben egyeneseknek tekintjük a háromszög transzverzálisait, így például f_a , f_b , f_c egyeneseket jelölnek, és a háromszög oldalain is azok egyenesét értjük. „Felezőpontjuk” és „hosszuk” azonban a háromszögben az oldalszakaszoknak lesz, és a -val, b -vel, c -vel az oldalak hosszát jelöljük.

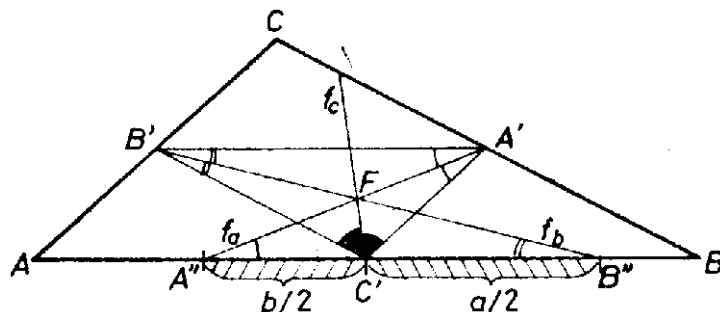
²Általában három azonos jellegű nevezetes vonal közül csak az egyikről beszélünk.

³A T_2 fölött álló csillag értelmese később derül ki.

geometriában használatos dualitásról, hiszen ott minden tételnek megadható a párja; de azért a fenti megfeleltetés is termékeny ötletekre vezethet.)

2. Az oldalfelező szögfelezők tulajdonságai és a metszéspontjuk létezése

1. tétel. Bármely háromszög három oldalfelező szögfelezője egy pontban metszi egymást.



1. ábra

Bizonyítás. Az ABC háromszög oldalfelező szögfelezői ugyanis az $A'B'C'$ középháromszög szögfelezői (1. ábra).

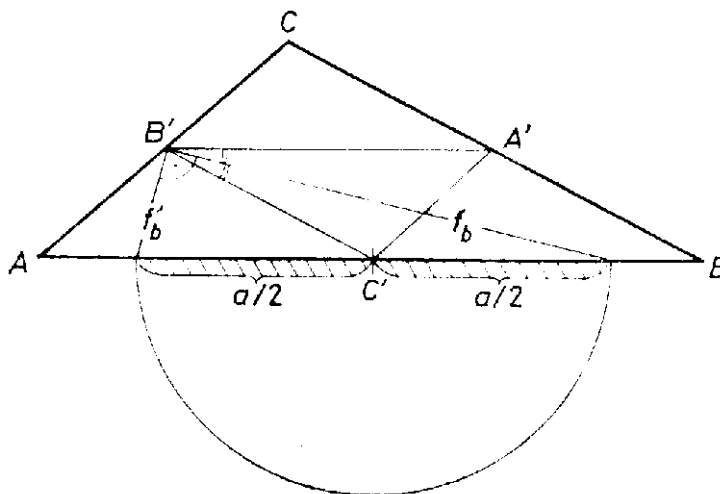
2. tétel. Az oldalfelező szögfelezők a háromszög mindhárom oldalát metszik. Egy oldalon az oldalfelező ponttól a másik két metszéspontig terjedő szakaszok rendre egyenlők a másik két oldal felével.

Bizonyítás. Az oldalfelező szögfelezők metszik a középháromszög oldalait, tehát metszik az eredeti háromszög oldalait is. Tekintsük az AB oldalt, és jelöljük f_a, f_b AB -vel alkotott metszéspontját A'' -vel, B'' -vel. Mivel f_a egyenlő szöget zár be AB -vel és $A'C'$ -vel, az $A'A''C'$ háromszög egyenlő szárú, $A''C' = A'C' = b/2$. Hasonlóan kapjuk, hogy $B''C' = B'C' = a/2$.

Megjegyzések. a) Az 1. ábrán $a < c, b < c$, így A'' az AC' , B'' a BC' szakaszon van, és például $AA'' = (c - b)/2$. Általában

$$AA'' = \frac{|c - b|}{2}.$$

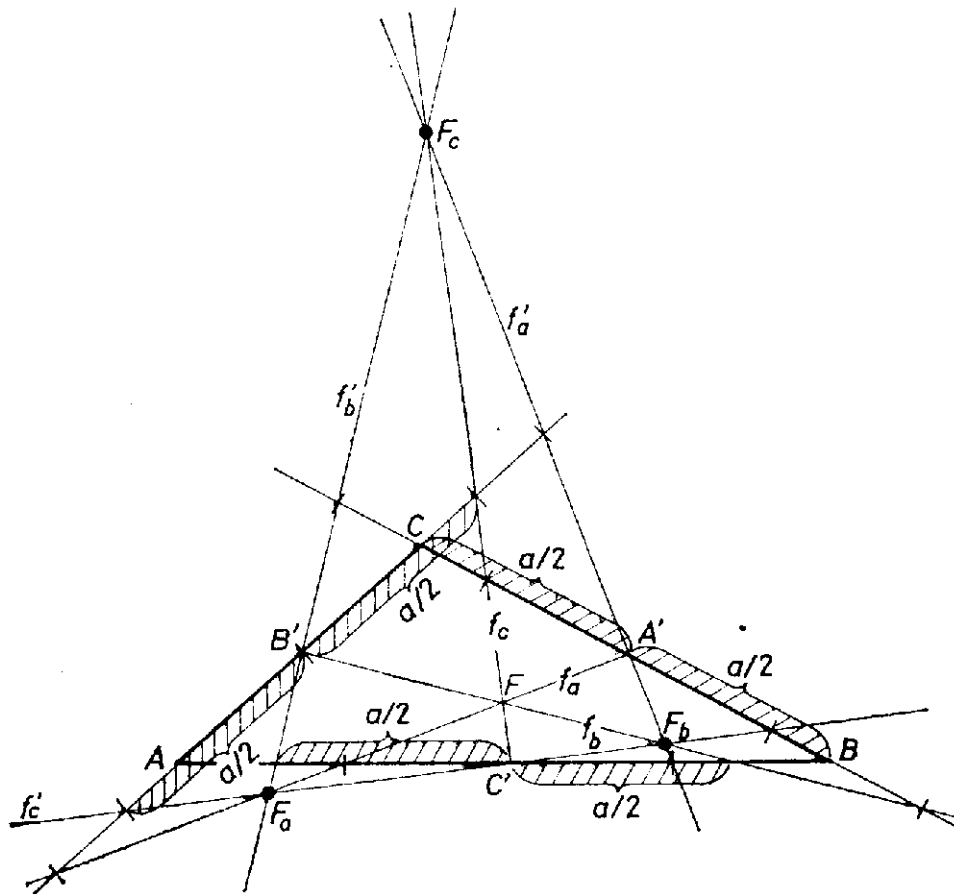
b) A külső szögfelezőkhöz hasonlóan beszélhetünk oldalfelező külső szögfelezőkről is, ezek ugyanúgy felezik az oldalakat, mint az oldalfelező szögfelezők, de a külső szögfelezőkkel párhuzamosak.** Könnyen látható, hogy a 2. tétel az oldalfelező külső szögfelezőkre is igaz, csak a metszéspontok rendre az oldalfelező pontok másik oldalán keletkeznek, mint az oldalfelező belső szögfelezők metszéspontjai.



2. ábra

c) Az egyik oldal felezőpontján átmenő oldalfelező belső szögfelező és oldalfelező külső szögfelező merőlegesek egymásra, és valamelyik másik oldalt annak felezőpontjára szimmetrikus pontokban metszik. A két metszéspont távolsága egyenlő a harmadik oldal hosszával (2. ábra). Ennek alapján könnyen megszerkeszthetjük az oldalfelező szögfelezőket, például a 2. ábrán a C' körüli $a/2$ sugarú kör metszi ki az AB egyenesből a B' -n átmenő oldalfelező szögfelezők metszéspontjait.

** Most látszik, hogy szerencsésebb lett volna T_2 -ben azt megkövetelni, hogy az egyenes legyen párhuzamos a belső szögfelezővel. Enélkül nehéz a kétféle szögfelezőt megkülönböztetni. (A fordító)

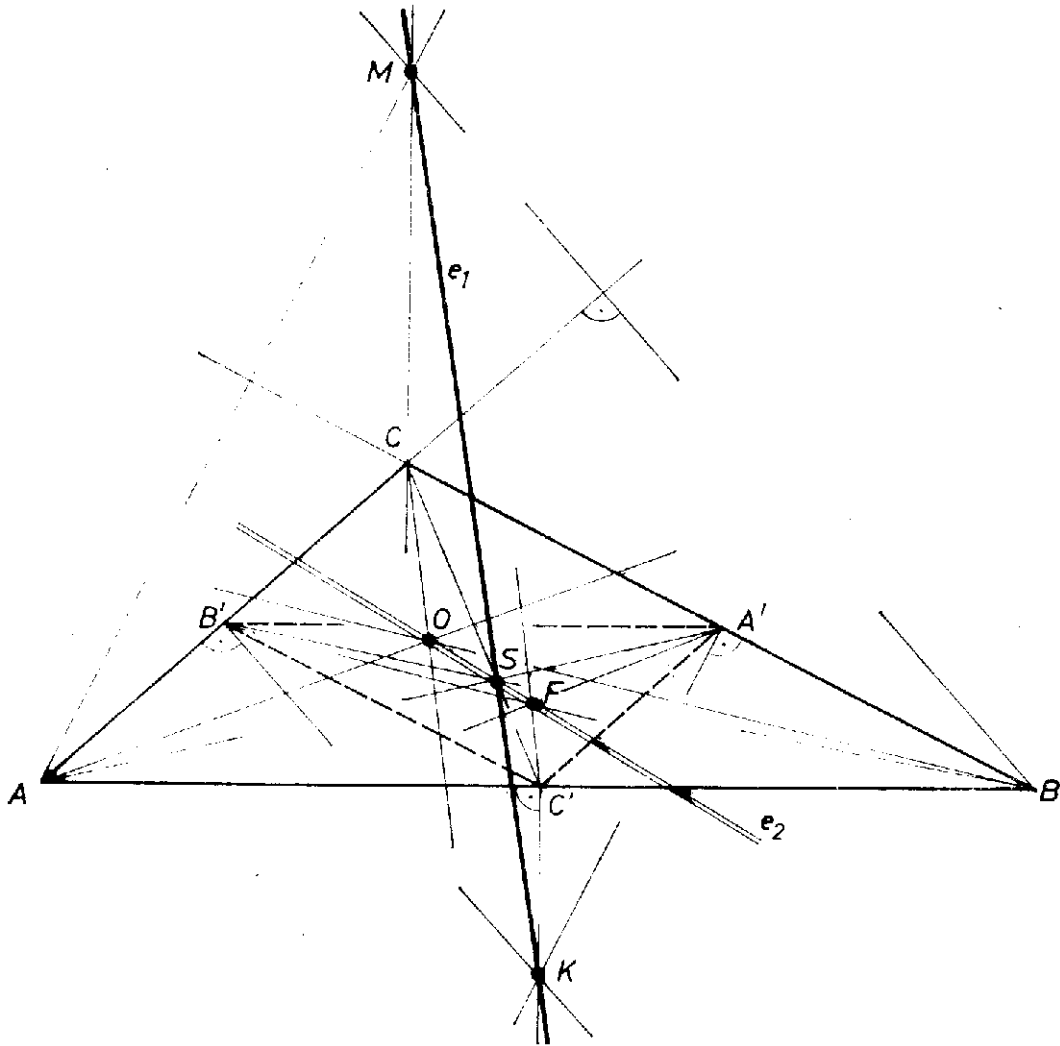


3. ábra

A 3. ábrán berajzoltuk az ABC háromszögbe mind a hat oldalfelező szögfelezőt. Három újabb metszéspont keletkezik, ezeket F_a -val, F_b -vel, F_c -vel jelöljük. Ezek a középháromszöget kívülről érintő körök középpontjai, és F az $F_a F_b F_c$ háromszög magasságpontja. A jobb tájékozódás kedvéért külön megjelöltük az ábrán az $a/2$ nagyságú szakaszokat.

3. tétel. Egy háromszögben az O , S , F pontok egy egyenesre illeszkednek, és $OS = 2FS$ (4. ábra).

Bizonyítás. Az $A'B'C'$ középháromszög középpontosan hasonló az ABC háromszöghöz, a hasonlóság aránya $1 : (-2)$, középpontja S . Emiatt az ABC -be írt kör O középpontját F -fel összekötő egyenes illeszkedik S -re, és S az OF szakaszt $2 : 1$ arányban osztja.

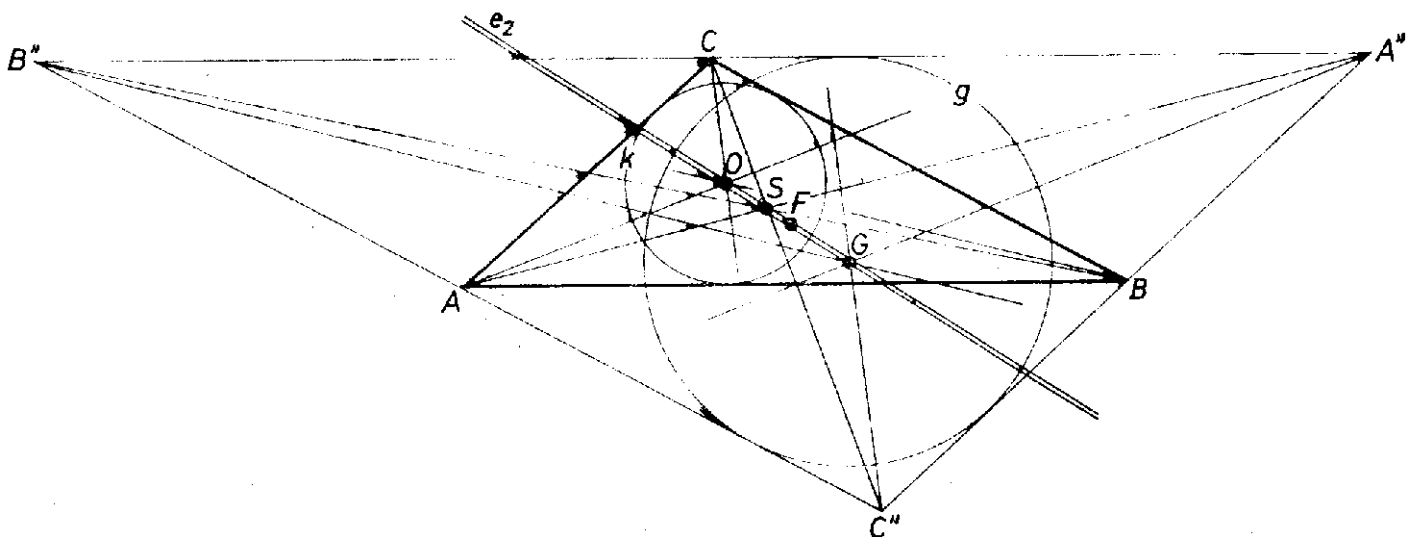


4. ábra

A kapott egyenest az ABC háromszög második Euler egyenesének nevezzük. (Az első Euler egyenes a K, S, M pontokon megy át, és mint tudjuk, $MS = 2KS$.)

Megjegyzés. Az $OMFK$ négyszög átlói a háromszög Euler egyenesei, metszéspontjuk S és ez az átlókat $2 : 1$ arányban osztja. Emiatt $OM \parallel FK$ és $OM = 2FK$ (4. ábra).

4. tétel. Tükrözzük O -t F -re, és jelöljük a kapott pontot G -vel. Ez a G pont rajta van a második Euler egyenesen, és a beírt kör középpontja abban az $A''B''C''$ háromszögben, amelyben ABC a középháromszög (5. ábra).



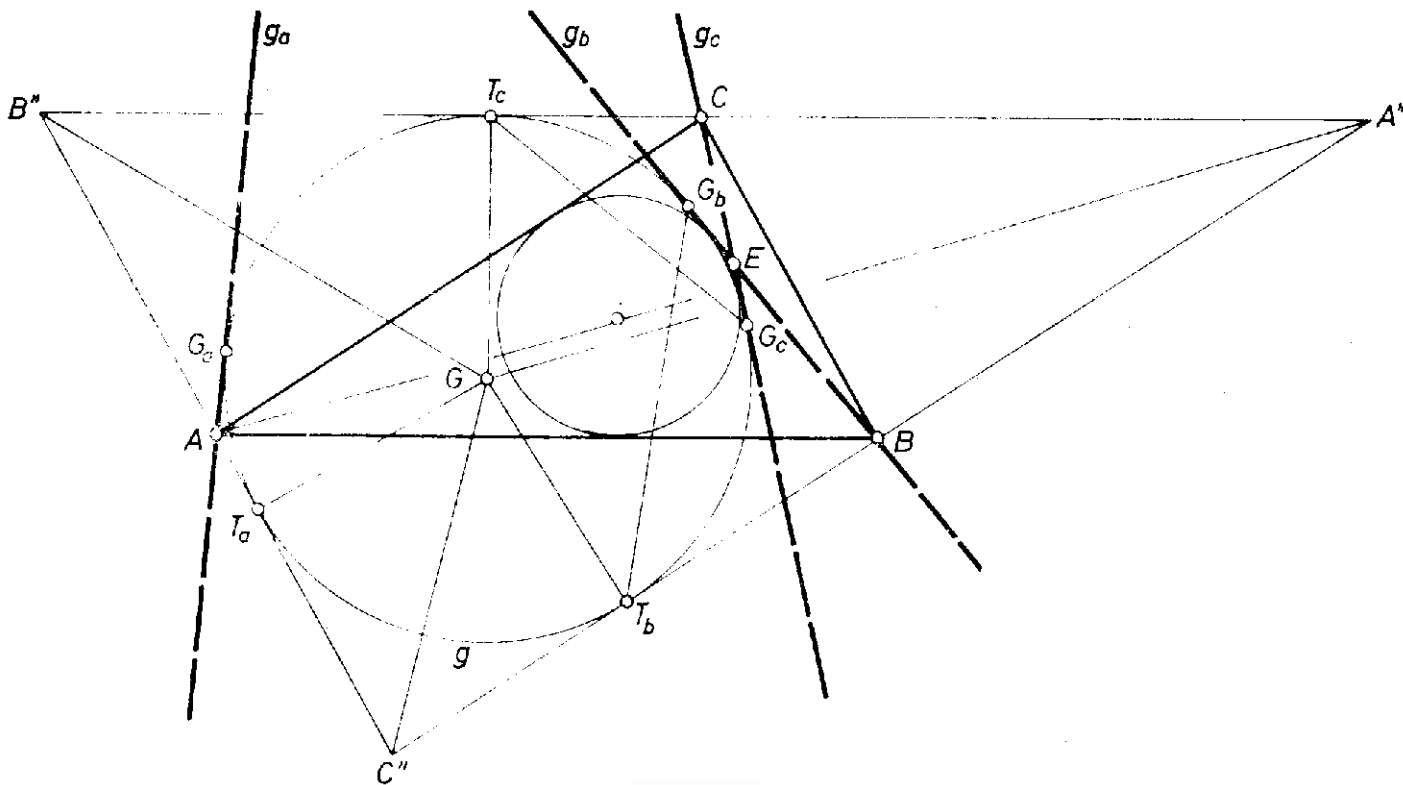
5. ábra

Bizonyítás. Az ABC háromszög ugyanúgy kapható meg $A''B''C''$ -ből, mint $A'B'C'$ az ABC -ből. Ezért a 3. tétel szerint G, S, O egy egyenesre illeszkednek, és $GS = 2OS$. Tehát G és F rajta vannak az OS egyenesen, és $GF = GS - FS = OS + FS = OF$ (esetleg a négy pont azonos).

A cikk elején mondott dualitásban a két Euler egyenes egymásnak felel meg, az $A''B''C''$ háromszög beírt köre pedig az ABC háromszög Feuerbach körének a párja. Jelöljük ezt a kört g -vel, mint látni fogjuk, ennek a körnek további nevezetes tulajdonságai vannak.

5. tétel. Ha meghúzzuk az ABC háromszög csúsaiból a g -hez tartozó második érintőket⁴ (6. ábra, g_a, g_b, g_c), három érintőnégyszöget kapunk (beírható körrel vagy hozzáírt körrel), amelyeket két érintő és két háromszög-oldal határol. (Az érintők azokból a csúcsokból indulnak, ahol az ABC háromszög két kiválasztott oldala nem metszi egymást. Az ABC háromszöget tehát három különböző módon is érintőnégyszöggé alakíthatjuk úgy, hogy – szemléletesen szólva – egy-egy oldalát „behorpasztjuk”⁵.)

Azt, hogy hogyan lehet eldönteni, hogy egy ilyen négyszögnek a kör beírt vagy hozzáírt köre lesz-e, a legegyszerűbben a 6. ábra $ABEC$ négyszögen tudjuk megmutatni. Az érintő körnek először is benne kell lennie a BAC szögtartományban, másrészt a g_b (ill. g_c) érintőt ugyanazon a félegyenesen kell érintenie, mint g . Most tehát a négyszögnek beírt köre van, amit az AB, AC oldalak és a BE, CE oldalak meghosszabbításai érintenek.⁶



6. ábra

Bizonyítás. (Zárójelben utalunk majd azokra a módosításokra, amik akkor szükségesek, ha E a háromszögen kívül van. Hozzáírt kör esetén hasonló a bizonyítás, amit az olvasó a 7. ábra alapján maga végiggondolhat.)

Azt kell belátnunk, hogy $AC + BE = AB + CE$, vagyis $BE - CE = c - b$. Jelöljük a g_a, g_b, g_c egyenesek érintési pontjait G_a -val, G_b -vel, G_c -vel, és legyenek T_a, T_b, T_c azok a pontok, amelyekben az $A''B''C''$ háromszög oldalai g -t érintik. Jelöléseink mellett (6. ábra)

$$\begin{aligned} BE - CE &= BG_b - EG_b - CE = BT_b - EG_c - CE = BT_b - CG_c = \\ &= BT_b - CT_c = A''T_b - A''B - (A''T_c - A''C) = c - b. \end{aligned}$$

Ha E a háromszögen kívül van, akkor

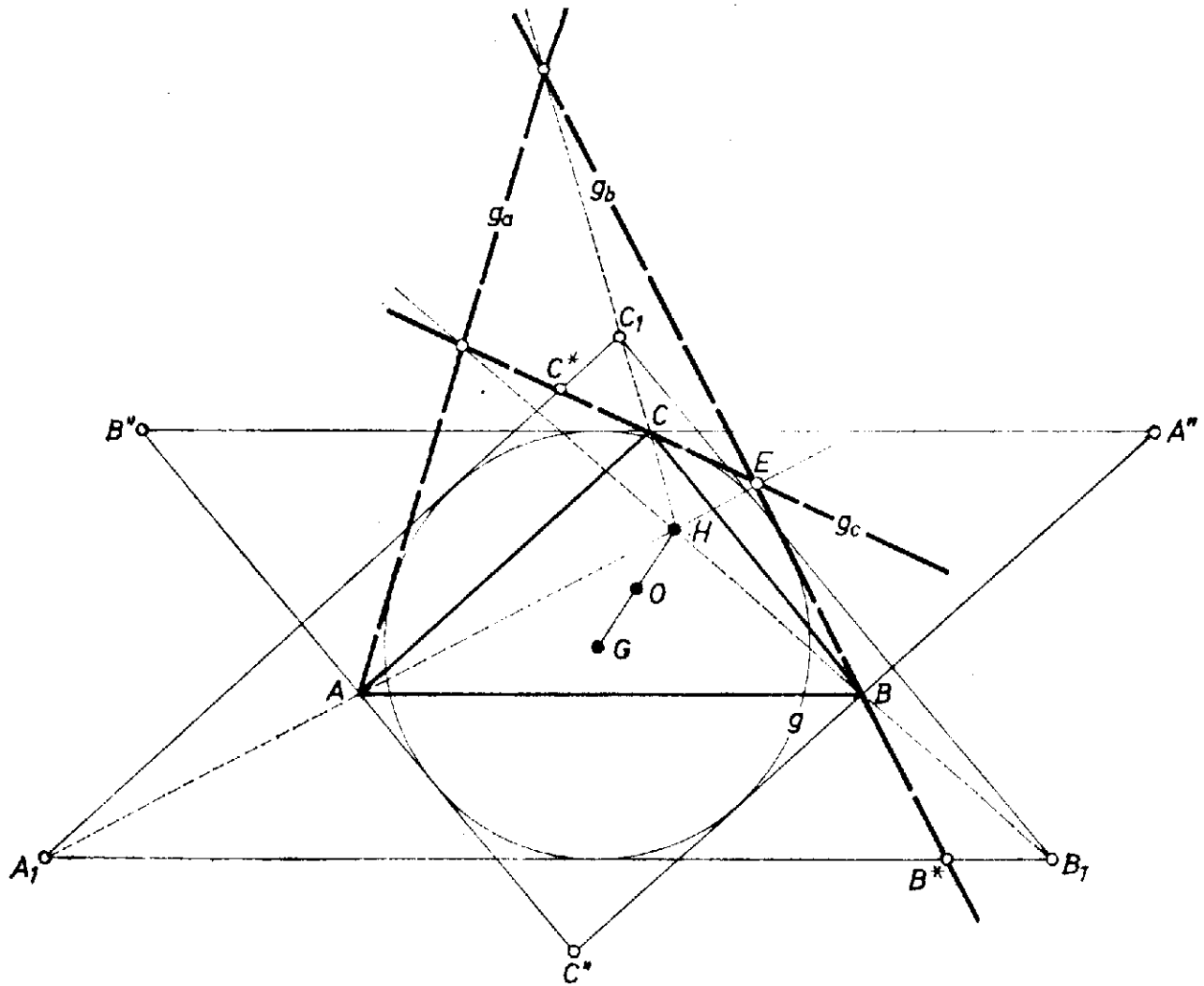
$$\begin{aligned} BE - CE &= BG_b + EG_b - CE = BT_b + EG_c - CE = BT_b + CG_c = BT_b + CT_c = \\ &= (A''T_b - A''B) - (A''T_c - A''C) = c - b. \end{aligned}$$

A g_a, g_b, g_c , érintőknek egy további tulajdonságát figyelhetjük meg, ha meghúzzuk g -nek az $A''B''C''$ háromszög oldalaival párhuzamos második érintőit. Ezek az ABC háromszöghöz középpontosan hasonló $A_1B_1C_1$ háromszöget határoznak meg (7. ábra). A hasonlóság H középpontja a második Euler egyenesen van, és $HO = OG$.

⁴Előfordulhat, hogy ezek azonosak az első érintőkkel (vagyis $A''B''C''$ oldalaival).

⁵Ha két érintő azonos, akkor a megfelelő négyszög háromszöggé fajul.

⁶Pontosabb volna, ha négyszögek helyett egyenes-négyesekről beszélnénk.



7. ábra

6. tétel. Az AA_1 , BB_1 , CC_1 egyeneseket a g_a , g_b , g_c érintők közül kettő-kettő ugyanabban a pontban metszi. (Pl. AA_1 -en van g_b és g_c már ismert metszéspontja, E .⁷)

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy AA_1 egyenes illeszkedik E -re. Az $ABEC$ és $A_1B^*EC^*$ négyszögek érintőnégy-szögek, és megfelelő oldalaik párhuzamosak vagy azonosak (B^* a g_b A_1B_1 -en, C^* a g_c A_1C_1 -en levő pontja). Az 5. tételben megadott kritériumok szerint (amelyek eldöntik, hogy a szóban forgó négyszögeknek beírt vagy hozzáírt köre van-e) a párhuzamos érintők az érintett köröknek mindig azonos oldalán vannak. Emiatt a két négyszög középpontosan hasonló, és a hasonlóság középpontja E . Állításunk ebből már következik.

Mindent összevéve már kilenc érintőt húztunk a g körhöz. Így valóban a háromszög Feuerbach körének a párja lehet.

A 3–6. tételekhez hasonló tételeket mondhatunk ki az oldalfelő külső szögfelezőkre, így további három Euler egyenest kapunk.

Végül felsoroljuk az általunk javasolt dualitás legfontosabb megfeleltetéseit:

⁷ Ha két érintő párhuzamos, akkor az az egyenes is párhuzamos velük, amelyiken a metszéspontjuknak rajta kellene lennie. („Végtelen távoli” metszéspont.) Ha az érintők azonosak, akkor alkalmas pontjukat választjuk metszéspontjuknak.

Az oldalfelező szögfelezők párhuzamosak a szögfelezőkkel.

Az oldalfelező szögfelezők a középháromszög szögfelezői.

F , S , O egy egyenesre illeszkednek, és $OS = 2FS$ (második Euler egyenes).

Ha O -t tükrözzük F -re, a kapott G pont a kétszeres háromszög beírt körének a középpontja.

A magasságvonalak párhuzamosak az oldalfelező merőlegesekkel.

A magasságvonalak a csúcson át a szemközti oldallal párhuzamosan húzott egyenesek által határolt kétszeres háromszög oldalfelező merőlegesei.

M , S , K egy egyenesre illeszkednek, és $MS = 2KS$ (első Euler egyenes).

A KM szakasz felezőpontja a középháromszög körülírt körének a középpontja (Feuerbach kör).

3. Megjegyzések

Célunk annak megmutatása volt, hogy a nevezetes pontok $\{S, K, O, M\}$ halmaza egy ötödik ponttal, F -fel bővíthető. Ezt indokolja e pontok tulajdonságainak a vizsgálata, és alátámasztja ezt a pontok síkbeli elhelyezkedése is (4. ábra).

Ha vesszük a háromszög beírt körének a középpontját (O), a súlypontot (S), a körülírt kör középpontját (K) és vesszük a megfelelő pontokat a középháromszögben és a megkétszerezett háromszögben, akkor olyan rendszert kapunk, amely még jobban alátámasztja az általunk javasolt módosítást:

a középháromszög	$F S K'$
a háromszög	$O S K$
a megkétszerezett háromszög	$G S M$ ⁸

Felhívjuk a téma iránt érdeklődő olvasók figyelmét a következő feladatokra és a velük kapcsolatos nevezetes összefüggésekre:

- Horvay Katalin – Reiman István: Geometriai feladatgyűjtemény, I. kötet*
1376 – 1379 (Euler egyenes, oldalfelező szögfelezők),
1380 – 1388 (Feuerbach kör),
1389 – 1394 (Simson egyenes),
1526 – 1528 (szögfelezők),
1266 – 1267 (érintőnégyeszőgek). 1389 – 1394 (Simson egyenes),
1526 – 1528 (szögfelezők),
1266 – 1267 (érintőnégyeszőgek).
- KöMaL 59. kötet 3–4. szám OKTV döntő mat. II. tantervűek 1. feladata.
- D. O. Sklajarszkij-N. N. Csencov-I. M. Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből*
2/1 kötet: 112–114, 147 (nevezetes vonalak),
118–121 (Euler egyenes, Feuerbach kör, Simson egyenes),
135 (Newton és Gauss tétele):
- Matematikai Versenykérdések I. kötet. Az 1897. évi versenyhez csatlakozó 2. jegyzet az „adott körbe és egyszersmind adott kör köré írt háromszögekről” (40. oldal).

A fordító

⁸ Tehát F az O' -t, G az O'' -t, M a K'' -t jelöli.