A fényképen látható csillagtest, a nagy ikozi-dodekaéder modelljének elkészítésére, valamint a fénykép melletti ábra magyarázatára az 1981. évi novemberi számunkban pályázatot írtunk ki. Erre összesen 15 pályamunka (16 modell) érkezett. A fődíjat, egy Go játékkészletet

CSILLAG PÉTER (Budapest),

a *Landler Jenő Híradástechnikai és Gépészeti Szakközépiskola II. osztályos tanulója* kapta a szépen elkészített modellért és az ábra érdembeli magyarázatáért.

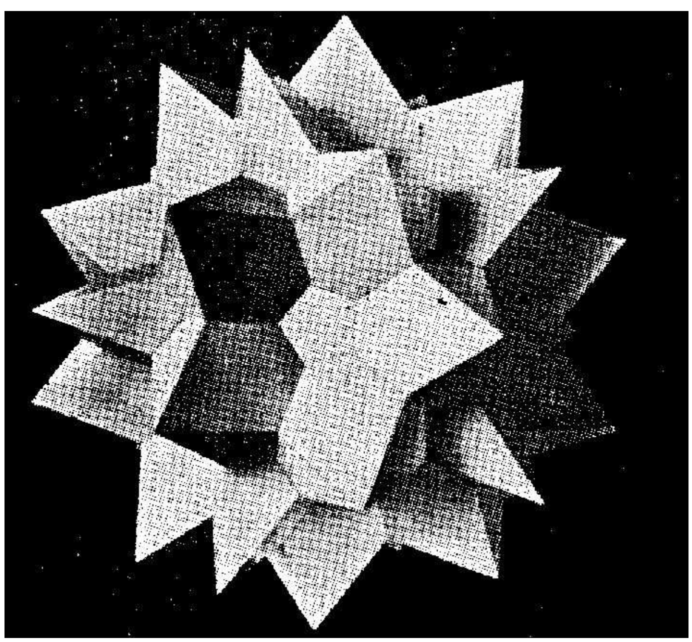
A gondosan, pontosan elkészített modellért 100–100 forintos könyvutalványt kaptak (betűrendben) :

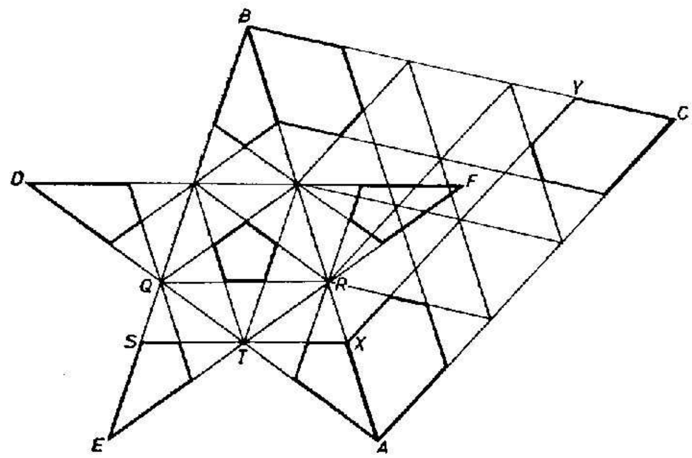
Búza Kinga (Kaposvár),
Szabó Gyöngyi (Szentes),
Tigelmann Péter (Mágocs).

A többi pályamunka beküldői közül **Ladányi László** (Miskolc), **Pintér Gábor** (Kiskunhalas) és **Tar Tibor** (Keszthely) egy-egy könyvet, míg **Dobos Balázs** és **Dobos Sándor** (Budapest), **Fekete György** (Sajókeresztúr), **Juhász István** (Pátroha), **Molnár Ágnes** (Kecskemét), **Molnár Endre** (Budapest), **Párkányi Rita** (Balassagyarmat), **Nagy Katalin** (Szécsény), **Szász Károly** (Sükösd), **Szászi Attila** (Tamási) munkája elismeréseként egy-egy emléklapot kapott.

*

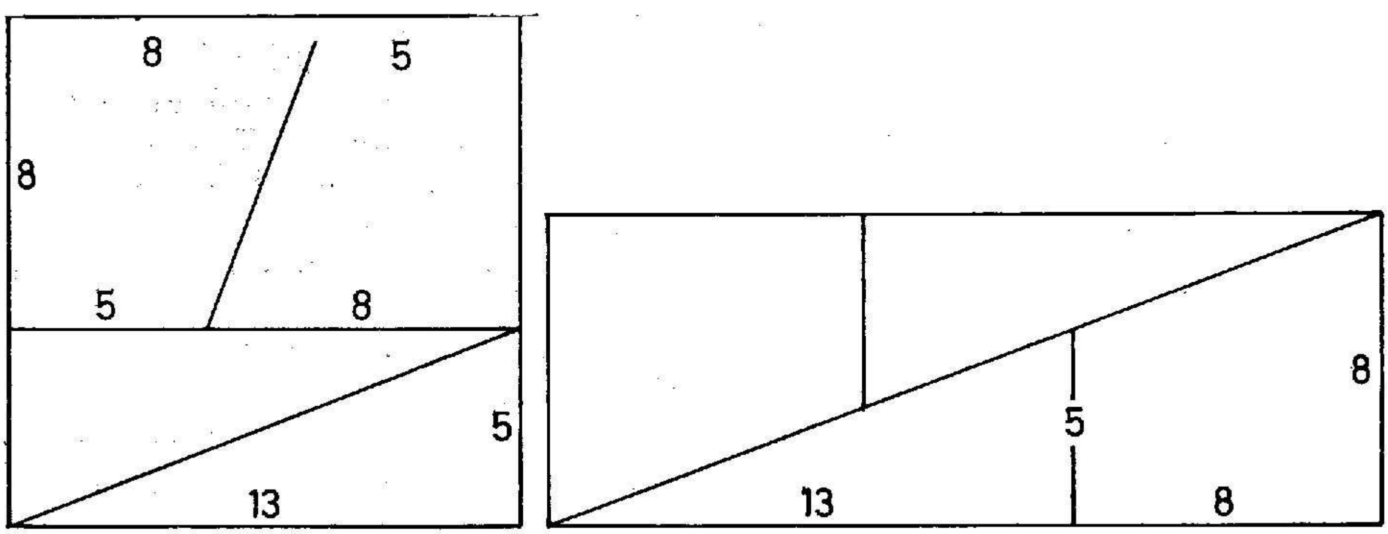
A csillagtestnek – ahogyan azt a pályázat kitűzésekor említettük – összesen 32 lapja van. Ebből 12 szabályos csillagötszög, a többi 20 pedig szabályos háromszög. Ezek azonban nem lapok a szokásos értelemben: egymást keresztülkasul átjárják. (Ezzel kapcsolatban érdemes megnézni. *Bakos Tibor: Megjegyzések az F. 2307. feladathoz* című cikkét a KÖMAL 1981. évi 7. számában az 53. oldalon.) Pályázóink mindegyike rájött arra, hogy a megmagyarázandó 2. ábrán éppen vastagon kihúzott „részlapok” azok, melyeket a többi lap nem takar el, s hogy a csillagtestet ezekből lehet összeállítani. A magyarázatok alapján a pályázók lényegében két csoportra oszthatók. Az egyik csoport tagjai azt mutatták meg, hogy az összeállításnál az egymás mellé kerülő részlapok élei egyenlő hosszúak – például hogy az ABC háromszögben az A csúcsnál található ötszög A-val szemközti oldala ugyanolyan hosszú, mint a csillagötszög belső kis ötszögének oldala stb. A másik csoport tagjai azt igyekeztek igazolni, hogy a részlapokból összeálló csillagtestben (ha az valóban összeáll) a csillagötszög és a háromszög részlapjai egy síkban vannak. Egyedül *Csillag Péter* volt az, akinek lényegében sikerült igazolnia, hogy az ábrán meghúzott szakaszok a különböző csillagötszög és háromszög alakú lapok metszésvonalai, bár nem tudott számot adni a csillagtest általa felhasznált szimmetriatulajdonságairól.


1. ábra



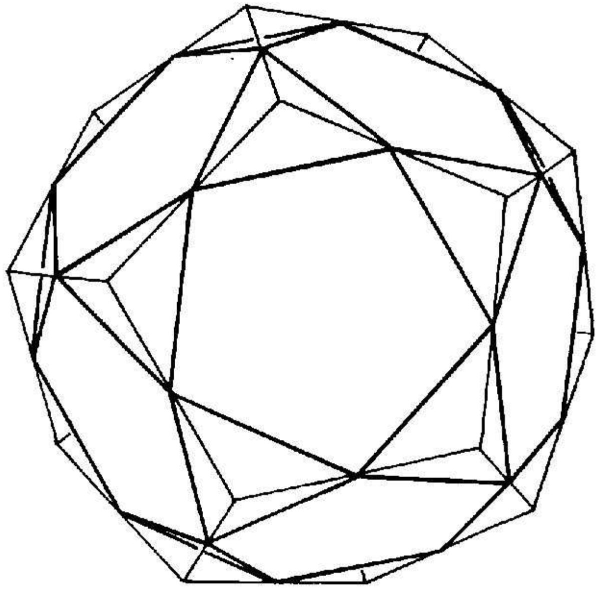
2. ábra

A pályázat egyik tanulsága: pályázóink egyike sem kételkedett – még egy pillanatra sem – abban, hogy az elkészítendő test *létezik!* Természetesen a pályázat szövege ezt sugallta, sőt a modell elkészítése után ki-ki kezébe foghatta, forgathatta: tessék, itt van! De vajon az elkészült test valóban test-e a szó *matematikai* értelmében is – azaz a lapok síklapok, az élek egyenes szakaszok, a csúcsok pedig pontok? Bizonyára nem! A következő (jól ismert) példa mutatja, hogy nem *minden* esetben hihetünk a „kézzelfogható tényeknek”. Egy 13 cm oldalú négyzetet vágjunk szét négy darabra, úgy, ahogyan azt a 3. ábra mutatja. A részekből egy 8×21-es téglalap állítható össze. (Tessék kipróbálni!) Ugyanakkor $13^2 = 169$ és $8 \cdot 21 = 168$, tehát az összerakással valami baj van!

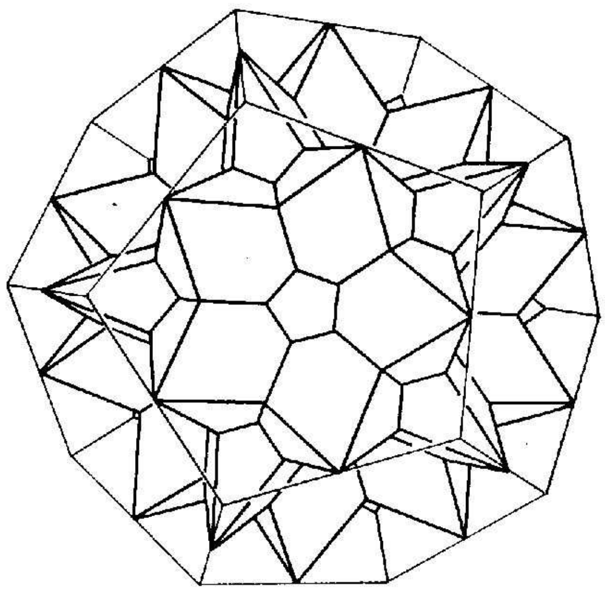


3. ábra

A csillagtest létezésével kapcsolatos gondok azonnal eltűnnének, ha találnánk olyan jól ismert poliédert, melyből csonkolással vagy valamilyen más módon megkaphatjuk a csillagtestet (lásd *Bérczi Szaniszló: Szabályos és félig szabályos testek periódusos rendszere*, KÖMAL, 1979. 10. szám, 193. oldal). Többen észrevették, hogy ha a testet vékony gumihártyával vonjuk be – azaz vesszük a konvex burkot – akkor olyan testet kapunk, melyet csupa szabályos ötszög és szabályos háromszög határol. Ez utóbbit pedig megkaphatjuk úgy, hogy egy szabályos dodekaéder csúcsait levágjuk (4. ábra). Így a csillagtest csúcsai – legalábbis megérzésünk szerint – egy szabályos dodekaéder élfelező pontjai (5. ábra).



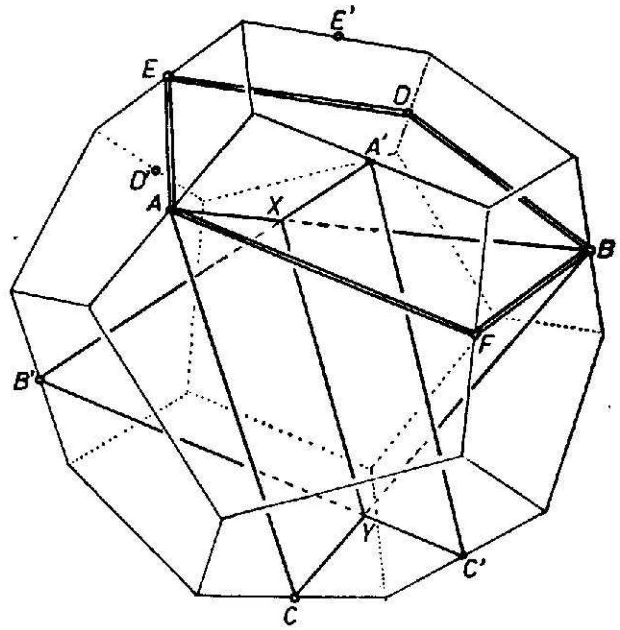
4. ábra



5.ábra

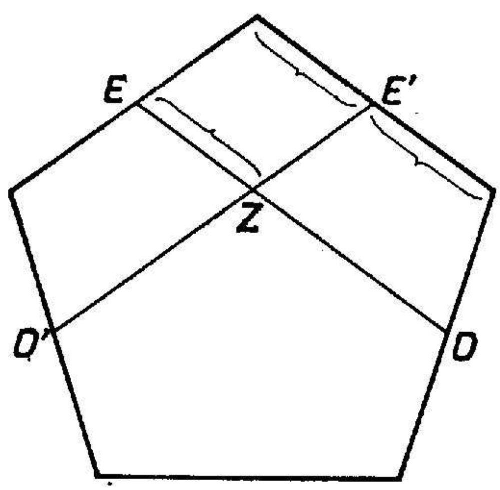
Lássuk, igaz-e ez az állítás ! Ennek érdekében induljunk el az ellenkező irányból. Vegyünk fel egy szabályos dodekaédert, és nézzük azt a 12 szabályos ötszöget, melyek csúcsai az élfelező pontok közül kerülnek ki, s melyek síkjai a dodekaéder egy-egy lapjával párhuzamosak. Az ilyen ötszögek egyikét a 6. ábrán kettős vonallal jelöltük. Minden ilyen ötszögben vegyük az átlók által meghatározott csillagötszöget. Ennek a 12 csillagötszögnek az oldalaiból további szabályos háromszögek is kialakulnak (szabályosak, hiszen mindhárom oldaluk ugyanolyan hosszú), ilyen például az ABC vagy az $A'B'C'$ háromszög. Minden ötszögátlóra pontosan egy csillagötszög és pontosan egy háromszög illeszkedik, az átlók száma $5 \cdot 12 = 60$, tehát a háromszögek száma $60/3 = 20$. Állítjuk, hogy a csillagötszögeket, illetve a szabályos háromszögeket a többi lap éppen azokban a szakaszokban metszi, amelyek a 2. ábrán szerepelnek. Ebből és a dodekaéder szimmetriáiból már következik, hogy ez a csillagtest ikertestvére annak, aminek a fényképe az 1. ábrán látható. Így nemcsak a 2. ábra „magyarázatát” adtuk meg, hanem egy csapásra elintéztük azt a problémát is, hogy létezik-e az elkészítendő test.

A háromszög, illetve csillagötszög lapokra vonatkozó állításokat éppen a dodekaéder szimmetriaviszonyai miatt elegendő, mondjuk, az ABC háromszögre és az $ABEFD$ csillagötszögre (illetve bármely másikra) igazolni. Sőt elég csak annyit megmutatni, hogy a lapok egy-egy csúcsánál pontosan azok az alakzatok jönnek létre, amelyeket a 2. ábrán vastag vonallal megjelöltünk.

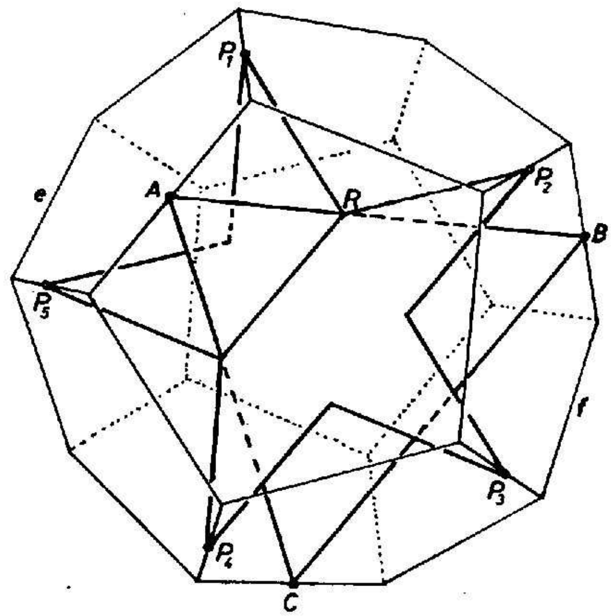


6. ábra

Szemeljük ki tehát az ABC háromszöget és annak is az A csúcsát. Ezt a lapot az A csúcshoz „közel” két háromszöglap és egy csillagötszöglap metszi, a két háromszöglap egyike $A'B'C'$. Ám A és A', B és B', valamint C és C' egymás tükörképei a dodekaéder egy Σ szimmetriasíkjára. Ezért például az AB és $A'B'$ szakaszok is egymás tükörképei, tehát metszik is egymást a Σ szimmetriasík egy X pontjában. Továbbá AA' és CC' párhuzamosak, másrészt egyenlők is (mindkettő a dodekaéder egy-egy lapjának két szomszédos élfelező pontját köti össze). Tehát az $ACC'A'$ négyszög téglalap, és az AC, $A'C'$ egyenesek párhuzamosak Σ-val. Ebből már következik, hogy az ABC és $A'B'C'$ lapok XY metszésvonala párhuzamos AC-vel.



7. ábra



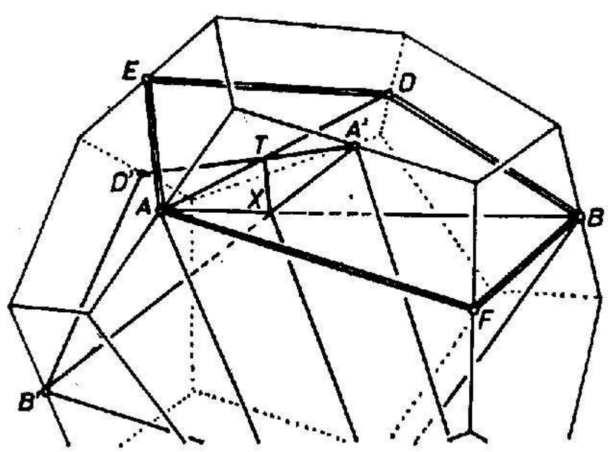
8. ábra

Következő feladatunk az AX távolság meghatározása. Tudjuk, hogy AB párhuzamos ED-vel (AB átló az $AFBDE$ szabályos ötszögben), és ugyanezért $A'B'$ párhuzamos $E'D'$-vel. Másrészt $AE \parallel A'E'$ (mert mindkettő párhuzamos a dodekaéder egy élével), tehát az $AEZX$ négyszög paralelogramma, ahol Z az ED és $E'D'$ szakaszok metszéspontja (7. ábra). Így $AX = EZ$, s ez utóbbi a 7. ábra alapján a dodekaéder élhosszának felével egyenlő.

Térjünk most vissza a 2. ábrához. Ott az $AXSE$ négyszög egy XS oldalú szabályos ötszög része. Ez az ötszög szükségképpen egybevágó a dodekaéder lapjaival, hiszen ez utóbbi méretét az élfelező pontok közti AE távolság egyértelműen meghatározza. Ezért SX hossza egyenlő a dodekaéder élével, a 2. ábrán látható AX távolság, pedig ennek, s így a dodekaéder élének is fele. Az ABC háromszöglapon tehát az AC-vel párhuzamos XY metszésvonal valóban ott van, ahol az a 2. ábrán szerepel. Ezzel persze azt is megmutattuk, hogy XY-t az ABC háromszög szimmetriatengelyeire tükrözve szintén metszésvonalakat kapunk.

Azt kell még megvizsgálnunk, hogy hol tűnik el az ABC lap a „hasát" felénk mutató $P_1P_3P_5P_2P_4$ csillagötszög alatt (8. ábra). Az AP_1 valamint BP_3 szakaszok párhuzamosak, hiszen AP_1 párhuzamos az e éllel, BP_3 pedig az f éllel, és e és f egymás tükörképei a dodekaéder középpontjára. Ezért AB és P_1P_3 is metszi egymást egy R pontban, és AR és RB aránya megegyezik az AP_1 és $BP_3 = P_1P_5$ szakaszok arányával, vagyis egy szabályos ötszög oldalának és átlójának arányával.

Visszatérve ismét a 2. ábrára, $ARQE$ egy szabályos ötszög négy egymás utáni csúcsa, továbbá $AQ = BR$, tehát AR és RB aránya megegyezik egy szabályos ötszög oldalának és átlójának arányával. Így az ABC háromszög és a csillagötszöglap metszésvonala átmegy a 2. ábrabeli R ponton, és természetesen átmegy az AC szakaszt ugyanilyen arányban osztó ponton is – tehát párhuzamos BC-vel. Ezzel igazoltuk, hogy az ABC háromszöglapból pontosan azok a részek „látszanak", amelyek a 2. ábrán vastag vonallal vannak elkerítve.



3. ábra

Nézzük most az $ABEFD$ csillagötszöget! Éppen az előbb igazoltuk, hogy az egyik háromszöglap éppen az QR szakaszban metszi, tehát a csillagötszöglap közepéből pontosan az a szabályos ötszög látszik ki, amely a 2. ábrán vastagon van kihúzva. Az maradt csak hátra, hogy az ötszög A csúcsánál létrejövő deltoid oldalait határozzuk meg. Ezek egyikét a $B'A'D'$ csúcsú csillagötszög metszi ki (9. ábra). Láttuk, hogy az AB és $A'B'$ szakaszok egymást az X pontban metszik, tehát a metszésvonal egyik pontja X. Mivel D és D' is tükörképei egymásnak a dodekaédernek arra a Σ szimmetriasíkjára, melyre A és A' (valamint B és B') is egymásnak tükörképei, ezért az AD és $A'D'$ szakaszok is metszik egymást, mondjuk egy T pontban. A kérdéses metszésvonal pedig éppen a Σ sík TX egyenese. Mivel AE párhuzamos Σ-val, továbbá AE és TX egy síkban vannak (az $AFBDE$ ötszög síkjában), azért TX párhuzamos AE-vel. Ez pedig azt jelenti, hogy a 2. ábrán a T pont az AD egyenesnek és az X-ből húzott AE-vel párhuzamos egyenesnek a metszéspontja, vagyis SX felezőpontja. Ezzel megmutattuk, hogy a csillagötszögből is a többi lap a vastag vonallal megjelölt részeket metszi ki. Ezzel a 2. ábra magyarázatának is a végére értünk.

Végül figyelmébe ajánljuk mindazoknak a borítón látható félig szabályos csillagtestet, akik kedvet kaptak ezek modelljeinek elkészítésére, de a nagy ikozi-dodekaéder túl nagy falatot jelentett számukra.