$$a_{n+1}=\frac{1}{5}\ (2a_n^3-a_n^2+3a_n+1). \tag{1}$$

1. Megmutatjuk, hogy a sorozat fölülről korlátos és szigorúan monoton növekvő. Ebből már következik, hogy a sorozatnak van határértéke.[1]

a) A sorozat felülről korlátos, egy felső korlátja 1/2. Ugyanis

$$\begin{aligned}
a_1&=0<\frac{1}{2},\\
a_2&=\frac{1}{5}<\frac{1}{2},\\
a_3&=\frac{1}{5}\left(2\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^2}+3\cdot\frac{1}{5}+1\right)=\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5^2}\left(\frac{2}{5}-1\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}-1\right)\right\}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}<\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

hiszen a kapcsos zárójelben álló kifejezés mindkét tagja negatív. És hasonlóan, ha valamely n indexre $a_n<\frac{1}{2}$, akkor ez a nagyságviszony öröklődik a következő elemre:

$$a_{n+1}=\frac{1}{5}(2a_n^3-a_n^2+3a_n+1)=\frac{1}{5}\left\{a_n^2(2a_n-1)+\frac{3}{2}(2a_n-1)\right\}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2}<\frac{1}{2},$$

hiszen a kapcsos zárójelben a negatív $(2a_n-1)$ kifejezést pozitív számokkal szoroztuk, majd összeadtuk. Ezzel első állításunkat bizonyítottuk.

b) A vizsgált számsorozat szigorúan monoton növekedő. Ehhez azt kell belátnunk, hogy

$$a_{n+1}-a_n>0.$$

Itt a_{n+1} helyébe (1)-et téve, azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{5}(2a_n^3-a_n^2+3a_n+1)-a_n=\frac{1}{5}(2a_n-1)(a_n^2-1),$$

és ez pozitív, hiszen már tudjuk, hogy $a_n<1/2$, így a szorzat mindkét tényezője negatív.

2. Eredményeink szerint (1) bal oldalának határértékét A-val jelölve, jobb oldalának határértéke $(2A^3-A^2+3A+1)/5$, tehát

$$A=\frac{1}{5}(2A^3-A^2+3A+1).$$

Ezt 0-ra redukálva, a bal oldal tényezőkre bontható:

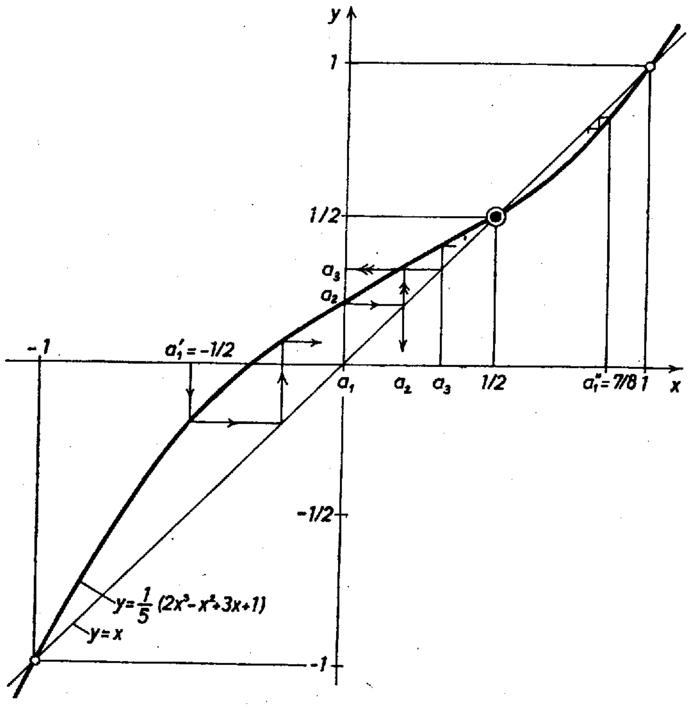
$$(A-1)(A+1)(2A-1)=0,$$

így A értéke csak $+1$, -1 és $1/2$ valamelyike lehet. És mivel a sorozat minden tagja – mint láttuk – 0 és 1/2 közé esik, azért csak $A=1/2$ lehet.

Kun Andrea (Szolnok, Verseghy F. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzés. Ábránk az $y=(2x^3-x^2+3x+1)/5$ függvénygörbét mutatja be a $(-1;\ 1)$ intervallumban, erről látjuk, hogy sorozatunk egymás utáni tagjai közelednek $(1/2)$-hez.

[1] Lásd az 1869. feladathoz fűzött megjegyzéseket, K. M. L. 47 (1973) 130. oldal.



Az $y = x$ egyenes szerepe az, hogy a_2-nek az y tengelyen leolvasott értékét az egytollú nyilak mentén „átvisszük" az x tengelyre, ebből mint abszcisszából olvassuk le a_3 értékét (kéttollú nyilak), és így tovább. Ez később már úgy „egyszerűsödik", hogy csak a görbe és az egyenes között lépegetünk a tengelyekkel párhuzamosan (a jelentését azonban nem szabad elfelejteni!).

Hasonlóan látható, hogy ugyanerre az eredményre jutunk a_1 helyett bármely olyan a_1'-ből indulva, amelyre $-1 < a_1' < 1$. Ha $a_1' = -1$ vagy $a_1' = 1$, akkor a sorozat minden tagja -1, illetve $+1$, ha pedig $|a_1'| > 1$, akkor divergens sorozatot kapunk.