$$(1)\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\cdot\binom{2n-2k}{n-k}\cdot\frac{m}{k+m},$$

Jelöljük az összeget $S\ (m,\ n)$-nel. (Egyébként az összegezést az $m$ paraméter nem érinti.) Az $n=1$ és $n=2$ esetben, határozatlan $m$ mellett

$$S(m,\ 1)=\binom{0}{0}\binom{2}{1}\frac{m}{m}+\binom{2}{1}\binom{0}{0}\frac{m}{1+m}=\frac{2(2m+1)}{m+1},$$

$$S(m,\ 2)=\binom{4}{2}+\binom{2}{1}^2\frac{m}{1+m}+\binom{4}{2}\frac{m}{2+m}=\frac{16m^2+32m+12}{(m+1)(m+2)}=$$

$$=\frac{4(2m+1)(2m+3)}{(m+1)(m+2)}$$

Az $n=3$ és $n=4$ esetekben adódó hasonló kifejezések láttán az a sejtésünk alakul ki, hogy minden $n$ természetes szám esetén $S(m,\ n)$ a következő kifejezéssel egyenlő:

$$(2)\qquad \frac{2^n(2m+1)(2m+3)\cdot\ldots\cdot(2m+2n-1)}{(m+1)(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n)}$$

ezt fogjuk bizonyítani.

Az $n=1$ és $n=2$ esetekben $S(m,\ n)$ kapott kifejezése nem egyszerűsíthető az $m$-et tartalmazó tényezővel, tehát $S(m,\ n)$ általában nem egyszerűsíthető. Másrészt (2) nevezője éppen az (1) tagjaiban szereplő $n$ db nevező szorzata, és így alkalmas a tagok közös nevezőjének szerepére. (Más nevező nem léphet föl, ugyanis az (1)-ben szereplő binomiális együtthatók egész számok, úgyszintén a $k=0$ indexű tagnak $\dfrac{m}{k+m}=1$ tényezője is.) Ha tehát a sejtett azonosságot a (2)-beli

$$N(m)=(m+1)(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+n)$$

nevezővel, az $m$ határozatlannak $n$-edfokú polinomjával megszorozzuk:

$$N(m)\cdot S(m,\ n)=m\cdot N(m)\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}\frac{1}{k+m}=$$

$$=2^n(2m+1)(2m+3)\cdot\ldots\cdot(2m+2n-1),$$

a bal oldalnak mind az $(n+1)$ tagja $n$-edfokú polinomja az $m$-nek, így $F(m)$ összegük is, mert az $m^n$ hatvány együtthatója minden tagban pozitív. Ugyancsak $n$-edfokú polinom a (3)-nak $G(m)$ jobb oldala is.

Két egyező fokszámú (egyváltozós) polinom akkor és csak akkor azonos, ha értékük 1-gyel több (különböző) helyen megegyezik, mint a fokszámuk. A bizonyításhoz megkívánt $(n+1)$ helyet természetesen tetszőlegesen választhatjuk, legyenek ezek $0,\ -1,\ -2,\ \ldots,\ -n$, vagyis a $k$ szummációs betű (1)-ben előírt értékeinek $(-1)$-szeresei.

Így minden egyes $m=-k$ esetben $F(m)=F(-k)$ egyetlen tagból áll, mert az

$$\frac{m\cdot N(m)}{k+m}\cdot\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$$

tag kivételével a további $n$ tag mindegyikében megmarad a $k+m=0$ tényező. A megmaradó tag pedig így alakul:

$$F(-k)=(-k)(-k+1)\cdot\ldots\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot1\cdot2\cdot\ldots\cdot(-k+n)\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k},$$

megjegyezve, hogy ez az írásmód csak azt jelenti, hogy a $(-k)$-tól kezdve egyesével növekedően következő $(n+1)$ tényező közül kimarad a 0; elöl $k$ számú negatív tényező áll – speciálisan $m=k=0$ esetén nincs negatív tényező –, utána pedig $(n-k)$ számú pozitív tényező – speciálisan $m=-n$, azaz $k=n$ esetén nincs pozitív tényező.

Eszerint a binomiális együtthatók előtt álló $n$ db tényező a $(-1)$ tényezők kiemelésével két faktoriálisba foglalható össze, illetve $m=0$ és $m=-n$ esetén egybe. A binomiális együtthatók is kifejezhetők faktoriálisokkal, ezért

$$F(-k)=(-1)^k k!(n-k)!\frac{(2k)!}{k!\cdot k!}\cdot\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!\cdot(n-k)!}.$$

A számlálókat tovább alakítjuk a $(2r)!$ páros és páratlan tényezőinek különválasztásával adódó

$$(2r)!=(2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2r)\cdot\big(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2r-1)\big)=$$

$$=2^r\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot r)\cdot\big(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2r-1)\big),$$

$$\frac{(2r)!}{r!}=2^r\cdot1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2r-1)$$

azonosság felhasználásával:

$$F(-k)=(-1)^k\cdot 2^n\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1),$$

ismét megjegyezve, hogy a $2^n$ tényező után először $k$ számú, majd $(n-k)$ számú tényező áll 1-től 2-esével növekedve – és ez érvényes $k=0$ és $k=n$ esetén is.

Ha itt a $(-1)^k$ tényezővel, azaz $k$ számú $(-1)$-es tényezővel beszorzunk a mondott első $k$ számú tényezőbe, és ezek sorrendjét megfordítjuk, akkor

$$F(-k)=2^n(-2k+1)(-2k+3)\cdot\ldots\cdot(-3)(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-2k-1),$$

ez pedig éppen a $G(m)$ értéke az $m=-k$ helyen [lásd (3) jobb oldalát].

Ezzel a sejtett azonosságot bebizonyítottuk, (1)-nek szumma jelet nem tartalmazó alakja a (2), a feladatot megoldottuk.

*Veres Sándor* (Debrecen, Fazekas M. Gimn., M. o. t.)

*Megjegyzések:* 1. Nem lényeges a feladat szövegének ez a korlátozása: $m$ természetes szám, az $F(m)=G(m)$ azonosságot minden valós $m$-re igazoltuk a speciális értékek felhasználásával. Ugyanígy (1) és (2) egyenlősége is fennáll minden olyan helyen, ahol értelmezve vannak.

2. A feladat tulajdonképpen az (1) összegnek szorzattá alakítása volt, arra gondolva, hogy szorzatok általában kényelmesebben számíthatók vagy kezelhetők tovább, mint összegek, különösen szorzatok összegei. De ha a $\sum$ jel példájára az „és így tovább”-nak „...” jelét sem engedjük meg, látszólag eltüntethetjük ezeket (2)-ből, faktoriálisok, binomiális együtthatók bevezetésével. $m$-en ismét természetes számot értve, a nevező mindjárt így írható:

$$N(m)=\frac{(m+n)!}{m!}.$$

És ha (2)-t a nevezőjével bővítjük, majd a számláló $n$ db új tényezőjének mindegyikét 2-vel szorozzuk és így beiktatjuk két-két eddigi tényező közé, akkor ezt is írhatjuk két faktoriális hányadosaként, majd az egész kifejezést két binom együttható hányadosaként:

$$\frac{(2m+1)(2m+2)(2m+3)\cdot\ldots\cdot(2m+2n-1)(2m+2n)}{\big(N(m)\big)^2}=$$
$$=\frac{(2m+2n)!m!m!}{(2m)!(m+n)!(m+n)!}=\frac{\binom{2m+2n}{m+n}}{\binom{2m}{m}}.$$

Az „és így tovább” a faktoriálisban rejtve van jelen.

*Veres Sándor*