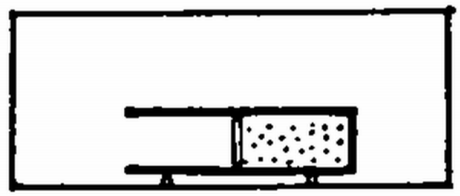
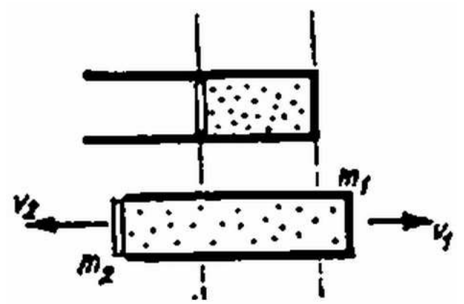
1. *Légüres térben vízszintesen fekszik egy m_1 tömegű henger, amelyben a térfogat felében egy m_2 tömegű dugattyú van rögzítve (1. ábra). Az elzárt részben n mol M molekulatömegű és T_0 hőmérsékletű gáz van. A dugattyú rögzítése hirtelen megszűnik, majd a dugattyú elszabadulása után a gáz szabadon kiáramlik. Mekkora lesz a henger végsebessége?*

Elhanyagolandó minden súrlódás, a henger és dugattyú hőfelvétele, valamint a folyamat első részében a gáz súlypontjának elmozdulása. Számadatok: $T_0 = 273$ K, $m_1 = 0{,}6$ kg, $m_2 = 0{,}3$ kg, $n = 25$ mol, *hélium esetében a molekulatömeg* 4, $C_v = 12{,}8$ joule/mol K, $\kappa = 5/3$.



1. ábra

Megoldás. A folyamat első része adiabatikus kiterjedés; kétszeres térfogatra kiterjedve (2. ábra) a hőmérséklet T lesz.



2. ábra

Az adiabatikus állapotváltozás törvénye szerint:

$$T_0 V_0^{\kappa-1} = T(2V_0)^{\kappa-1},$$

innen $T = T_0/2^{\kappa-1}$.

A henger és dugattyú mozgási energiáját a gáz belső energiájának csökkenése fedezi:

$$nC_v(T_0 - T) = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Az impulzustétel szerint:

$$m_2 v_2 = m_1 v_1.$$

Az egyenletrendszer megoldása adja a henger sebességét a folyamat első részének végén:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2nC_v(T_0 - T)}{m_1\left[1 + (m_1/m_2)\right]}}.$$

A folyamat első részének végső pillanatában tehát a henger jobbra mozog v_1 sebességgel, a dugattyú pedig már éppen kiesett. Ettől kezdve rögzítsük koordináta-rendszerünket a hengerhez. Adva van a vákuumban egy nyitott henger, amelyben nM tömegű, T hőmérsékletű gáz van. Ez a gáz nyilván balra kiáramlik és a hengert jobbra löki v_κ sebességgel. A gáz molekuláinak mozgási energiája:

$$\frac{nM \cdot v_m^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot nRT,$$

tehát a gázmolekulák átlagos repülési sebessége:

$$v_m = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Egyensúlyban a molekulák egyhatod része repül az egyes koordináta-tengelyek irányában ide és oda. A kiáramlást úgy fogjuk számolni, hogy feltételezzük: a kiáramlás során végig igaz lesz, hogy a molekulák 1/6 része repül a cső fenekének. Tudjuk azonban, hogy ez csak első közelítésben van így. Tehát $nM/6$ tömeg v_m sebességgel repül a henger fenekének, ott rugalmasan ütközik. Ezután a henger v_κ, a gáz v_g sebességgel mozog. Rugalmas ütközés esetében az impulzus megmaradásán kívül a mozgási energia is megmarad. Az impulzus megmaradása szerint:

$$\frac{nM}{6}\cdot v_m=\frac{nM}{6}\cdot v_\mathrm{g}+m_1v_\kappa.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$\frac{nMv_m^2}{6\cdot 2}=\frac{nMv_\mathrm{g}^2}{6\cdot 2}+\frac{m_1v_\kappa^2}{2}.$$

Az egyenletrendszer megoldása adja a henger sebességét a gáz kiáramlása után:

$$v_\kappa=\frac{2nM}{6m_1+nM}\cdot v_m=\frac{2nM}{6m_1+nM}\cdot\sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

A gázmolekulák egyhatoda v_g sebességgel pattan vissza, amelynek abszolút értéke kisebb, mint v_m. A gáz szükségképp valamelyest lehűl, mert belső energiájának csökkenéséből fedezi a henger (újabb) mozgási energiáját.

Összesítve a henger sebessége: v_1+v_κ.

Számadataink szerint $nM=0{,}1$ kg, $T=171{,}17$ K, $v_1=283$ m/s, $v_2=566$ m/s, $v_m=1026$ m/s, $v_\mathrm{g}=-972$ m/s, $v_\kappa=55{,}5$ m/s. A henger teljes végső sebessége:

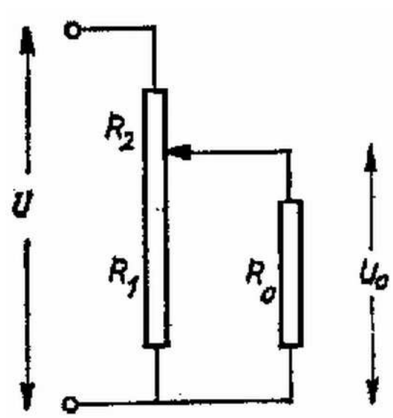
$$283\ \mathrm{m/s}+55{,}5\ \mathrm{m/s}=338{,}5\ \mathrm{m/s}.$$

2. *Egy* $U_0=4{,}5$ volt *mellett működő,* $R_0=2$ ohm *ellenállású fogyasztót* $U=6$ volt *elektromotoros erejű, elhanyagolható belső ellenállású akkumulátorról kell működtetnünk, és ezért egy csúszó érintkezős ellenállásból feszültségosztót (potenciométert) állítottunk össze.*

a) *Az a kívánság, hogy a hatásfok (a fogyasztó és az egész berendezés teljesítményének hányadosa) ne legyen kisebb, mint* $\eta=0{,}6$. *Mekkora legyen a változtatható ellenállás és legalább mekkora áramerősséget kell kibírnia?*

b) *Milyen körülmények között lesz a hatásfok a lehető legnagyobb és mekkora ez a hatásfok?*

Megoldás. *a)* A fogyasztón minden esetben $I_0=U_0/R_0=2{,}25$ amperes áram folyik keresztül és teljesítménye $P_0=U_0I_0=U_0^2/R_0=10{,}125$ watt (3. ábra).



3. ábra

Legyen a feszültségosztó részeinek ellenállása R_1 és R_2. A berendezésen átfolyó teljes áramerősség I_t, és az összes felhasznált teljesítmény:

$$P_t=UI_t.$$

A hatásfok:

(1)
$$\eta=\frac{P_0}{P_t}=\frac{U_0^2}{UR_0I_t}.$$

Minthogy U_0, U, R_0 adott mennyiségek, látható, hogy a hatásfok fordítva arányos a teljes áramerősséggel. Az áramerősség, ha a hatásfok 0,6:

$$I_t=\frac{U_0^2}{UR_0\eta}=2{,}81\ \mathrm{A}.$$

Ezt kell kibírnia a huzalellenállás R_2 ellenállású részének.

A huzalellenállás felső részének ellenállása Ohm törvénye szerint:

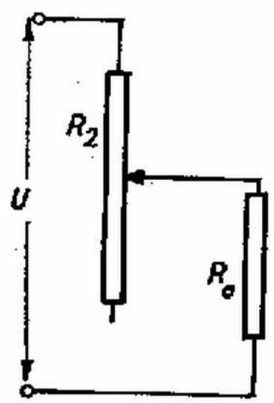
$$R_2=\frac{U-U_0}{I_t}=0{,}53\ \Omega.$$

Az alsó rész ellenállása pedig:

$$R_1 = \frac{U_0}{I_t - I_0} = 8\ \Omega.$$

A huzalellenállás összesen 8,53 ohmos.

b) az (1) egyenlet alapján látható, hogy esetünkben a hatásfok csak a teljes áramerősségtől függ. A hatásfok akkor lesz a lehető legnagyobb, ha I_t a lehető legkisebb. Ez minimális, ha $I_1 = 0$, vagyis $R_1 = \infty$ (4. ábra).



4. ábra

A kapcsolásból előtétellenállás lesz. Ekkor

$$R_2 = \frac{U - U_0}{I_0} = 0{,}67 \text{ ohm és a hatásfok:}$$

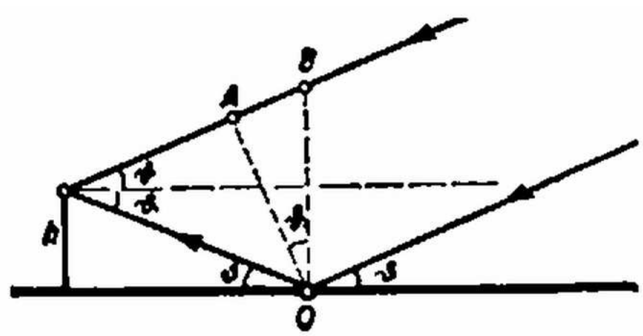
$$\eta = \frac{U_0^2}{UR_0I_0} = \frac{U_0^2}{UU_0} = \frac{U_0}{U} = 0{,}75.$$

3. *Egy rádiócsillagászati obszervatórium tengerparton levő rádióvevőjét $h = 2$ méter magasan helyezték el a tenger szintje felett. A vevő csak az elektromos térerő vízszintes összetevőjét érzékeli. Egy $\lambda = 21$ centiméteres hullámhosszú elektromágneses hullámot kibocsátó rádiócsillag felkel a horizont fölé és ekkor a vevő maximumokat és minimumokat észlel.*

a) *Az érkező rádióhullámok milyen iránya esetében észlelnek maximumokat és minimumokat? A független változó az érkező hullámok irányának szöge a vízszinteshez képest.*
b) *Növekszik vagy csökken az intenzitás közvetlenül azután, hogy a csillag megjelent a horizont felett?*
c) *Hogyan alakul a felfogott jelek egymásutáni maximumainak és minimumainak intenzitásaránya?*

Megjegyzés. A visszavert és érkező hullámok amplitúdóinak aránya $(n - \sin\vartheta)/(n + \sin\vartheta)$, ahol ϑ a hullám érkezési irányának szöge a vízszinteshez képest és n a törésmutató, amely a víz és rövid elektromágneses hullámok esetében 9-cel egyenlő.

Megoldás. *a)* A vevőbe a rádióhullámok részben közvetlenül, tehát visszaverődés nélkül, részben pedig a tengerről való visszaverődés után juthatnak be. (A többszörösen visszavert sugarak hatását elhanyagoljuk.) A közvetlenül érkező és a visszavert sugarak különböző utat tesznek meg, ezért fázisuk a detektorban különböző lesz; interferálnak.



5. ábra

A geometriai útkülönbséget könnyen meghatározhatjuk az 5. ábra alapján:

$$AB = 2h \sin\vartheta.$$

Az interferencia maximum- és minimumhelyek kiszámításához még azt is figyelembe kell vennünk, hogy visszaverődéskor $\lambda/2$ fázisugrás következik be; a maximum feltétele tehát:

$$2h\sin\vartheta_{\max}+\frac{\lambda}{2}=k\lambda,$$

vagyis

(2) $$\sin\vartheta_{\max}=\frac{\lambda}{2h}\left(k-\frac{1}{2}\right), \text{ ahol } k=1,2,3,\ldots$$

A minimum feltétele:

$$2h\sin\vartheta_{\min}+\frac{\lambda}{2}=(2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

vagyis

(3) $$\sin\vartheta_{\min}=\frac{\lambda}{2h}k, \text{ ahol } k=0,1,2,3,\ldots$$

b) A felkelés pillanatában $\vartheta=0$, ami (3) szerint minimumot jelent. Tehát ϑ növelésével maximum felé haladunk, az intenzitás növekszik.

c) Minimum esetében az eredeti és a visszavert hullámok amplitúdói kivonódnak (E az elektromos térerő amplitúdója):

$$E-E\cdot\frac{n-\sin\vartheta_{\min}}{n+\sin\vartheta_{\min}}=\frac{2\sin\vartheta_{\min}}{n+\sin\vartheta_{\min}}\cdot E.$$

Felhasználva (3)-at, ez a különbség

$$\frac{(\lambda/h)\cdot k}{n+\left[\lambda/(2h)\right]\cdot k}\cdot E.$$

A vétel erőssége az amplitúdó négyzetével arányos, ezért az egymás után következő minimumok intenzitása, k értékétől függően (konstans szorzótól eltekintve):

$$\left(\frac{(\lambda/h)\cdot k}{n+\left[\lambda/(2h)\right]\cdot k}\right)^2\cdot E^2.$$

Maximum esetében az eredeti és visszavert hullámok amplitúdói összeadódnak:

$$E+E\cdot\frac{n-\sin\vartheta_{\max}}{n+\sin\vartheta_{\max}}=\frac{2n}{n+\sin\vartheta_{\max}}\cdot E.$$

Felhasználva (2)-t, az összeg

$$\frac{2n}{n+\dfrac{\lambda}{2h}\cdot\left(k-\dfrac{1}{2}\right)}\cdot E.$$

Az intenzitás az amplitúdó négyzetével arányos, ezért az egymás után következő minimumok intenzitása, k értékétől függően:

$$\left[\frac{2n}{n+\dfrac{\lambda}{2h}\cdot\left(k-\dfrac{1}{2}\right)}\right]^2\cdot E^2.$$

Táblázatunk áttekintést ad a számértékekről:

$k_{\min}$	$k_{\max}$	$\vartheta_{\min}$	$\vartheta_{\max}$	Int. min.	Int. max.
0		0		0	
	1		1,504°		3,9768 E^2
1		3,009°		0,000136 E^2	
	2		4,517°		3,9309 E^2
2		6,027°		0,000532 E^2	
	3		7,542°		3,8858 E^2
3		9,062°		0,00118 E^2	

Kísérleti feladat. Egy nem lineárisan nyúló gumiszál elasztikus viselkedését kellett tanulmányozni.