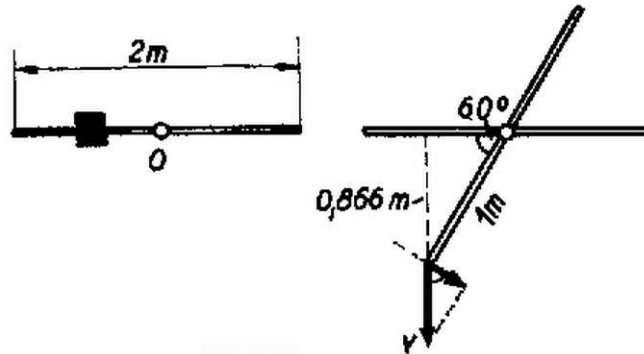


Az I. forduló feladatai

1. Egy 2 méter hosszú pálca közepén csapágyazva van (1. ábra). Az egyik végétől 0,5 méterre egy 3 kg tömegű test van a pálcára csúsztatva. A pálca tömege a 3 kg-hoz képest, valamint a súrlódás elhanyagolható; $g = 10 \text{ m/s}^2$. A pálcát vízszintes helyzetéből elengedjük. Mekkora sebességgel megy át a pálca vége a függőleges helyzetén?

(Dr. Bodó Zalán)



1. ábra

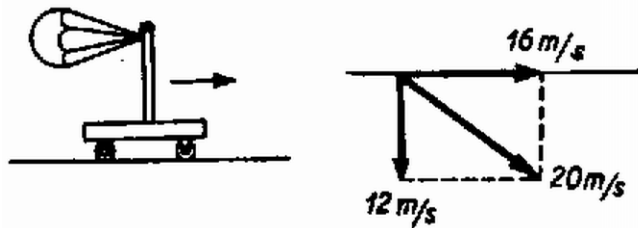
Megoldás. A 3 kg tömegű test szabadon esik. A 0,866 méteres szabadesés végsebessége $v = \sqrt{2gs} = 4,16 \text{ m/s}$. Ennek érintőleges összetevője a bot végének sebessége:

$$4,16 \cdot \cos 60^\circ = 2,08 \text{ m/s.}$$

2. Egy sínen haladó jármű magas rúdra kötött fékező ernyőt vontat 16 m/s sebességgel (2. ábra). Az ernyő súlya elhanyagolható. Szélcsendes időben a vontatási teljesítmény 32 kW . Mekkora teljesítmény szükséges a fékező ernyő ugyanazon sebességű vontatásához, ha az útra merőlegesen 12 m/s sebességű oldalszél fúj?

(Nagy László)

Megoldás. A teljesítmény egyenlő az erő és sebesség szorzatával: $P = Fv$. Oldalszél esetében az ernyő levegőhöz viszonyított sebessége: $\sqrt{16^2 + 12^2} \text{ m/s} = 20 \text{ m/s}$.



2. ábra

Tehát a sebesség $20/16$ arányában lett nagyobb. Mivel a közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos, ezért a közegellenállási erő $(20/16)^2$ arányában növekedett. Azonban ennek az erőnek csak az útmenti összetevője, tehát az eredeti közegellenállási erő

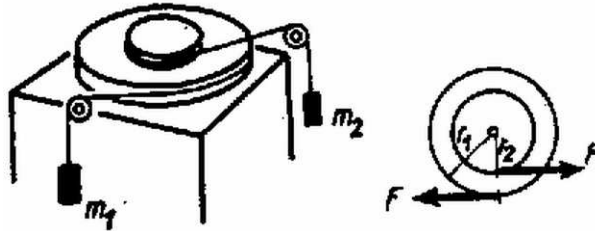
$$(20/16)^2 \cdot (16/20) = 20/16 - \text{szorozva}$$

végez munkát. A sebesség változatlan, tehát oldalszél esetében a vontatáshoz szükséges teljesítmény:

$$32 \cdot (20/16) \text{ kW} = 40 \text{ kW.}$$

3. Egy mereven összeerősített kettős korong sugarai $r_1 = 0,3 \text{ m}$ és $r_2 = 0,2 \text{ m}$, tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = 0,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. A korong egy légpárnás asztalon fekszik, a súrlódás a korong és az asztal között elhanyagolható (3. ábra). Mindegyik korong peremére egy-egy fonál van felcsévélve. A nagyobbik korong fonalán $m_1 = 5 \text{ kg}$ tömegű test lóg. Mekkora legyen a kisebbik korong fonalán lógó test m_2 tömege, hogy a kettős korong tengelye egyhelyben maradjon? ($g = 10 \text{ m/s}^2$.)

(Holics László)



3. ábra

Megoldás. A korongra ható erők eredője nulla kell, hogy legyen. Ezért az F fonálerőknek egyenlőknek és párhuzamosaknak kell lenniük, ekkor erőpár jön létre, amelynek csak forgatónyomatéka van, de a korong tengelyét nem mozdítja el. A kettős korong β szöggyorsulással forog, m_1 gyorsulása (lefelé) $r_1\beta$ a fonálerő $F = m_1g - m_1r_1\beta$, m_2 gyorsulása (lefelé) $r_2\beta$, a fonálerő $F = m_2 + m_2r_2\beta$. Az erőpár forgatónyomatéka hozza létre a szöggyorsulást:

$$F(r_1 - r_2) = \beta\Theta.$$

A kapott egyenletrendszer megoldása:

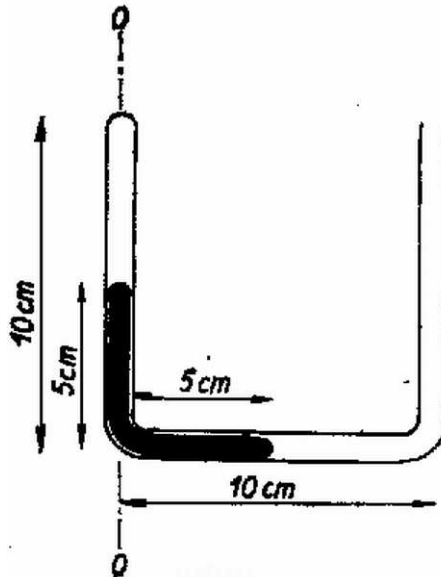
$$\beta = \frac{m_1g(r_1 - r_2)}{\Theta + m_1r_1(r_1 - r_2)} = 12,5 \text{ s}^{-2},$$

$$F = m_1g \cdot \frac{\Theta}{\Theta + m_1r_1(r_1 - r_2)} = 31,25 \text{ newton},$$

$$m_2 = m_1 \cdot \frac{\Theta}{\Theta + m_1(r_1^2 - r_2^2)} = 2,5 \text{ kg}.$$

4. Egy kis keresztmetszetű, U alakú cső bal oldali, zárt szárában és az alsó vízszintes szárban 5 cm hosszú a higanyoszlop (4. ábra). Ezután a csövet az $O - O$ függőleges tengely körül állandó szögsebességgel forgatjuk. Ekkor azt látjuk, hogy a higany pontosan az alsó csövet tölti ki. Mennyi a szögsebesség? A higany sűrűsége $13,6 \text{ g/cm}^3$, a légköri levegő nyomása 10 newton/cm^2 (ez megfelel $73,5 \text{ cm}$ magas higanyoszlop nyomásának).

(Vermes Miklós)



4. ábra

Megoldás. A bezárt levegő nyomása a forgatás előtt

$$p_0 = 10 \text{ N/cm}^2 - \frac{5 \text{ cm}}{73,5 \text{ cm}} \cdot 10 \text{ N/cm}^2 = 10 \text{ N/cm}^2 - 0,68 \text{ N/cm}^2 = 9,32 \text{ N/cm}^2.$$

Boyle – Mariotte törvénye szerint forgatáskor a bezárt levegő nyomása ennek a fele:

$$p = 4,66 \text{ newton/cm}^2 = 46 \text{ 600 Pa}.$$

Az A keresztmetszetű esőben a higany tömege $A \cdot l \cdot \rho$, ahol $l = 10$ cm. Ennek ω szögsebességű körpályán tartásához szükséges erő:

$$(1) \quad F = A l \rho \omega^2 \cdot l/2$$

($l/2 = 0,05$ méter az átlagos rádiusz). Ezt a higanyoszlop végei közötti nyomáskülönbség biztosítja:

$$F = A \cdot (100\,000 \text{ Pa} - 46\,000 \text{ Pa}).$$

Egyenlővé téve (1)-et és (2)-t

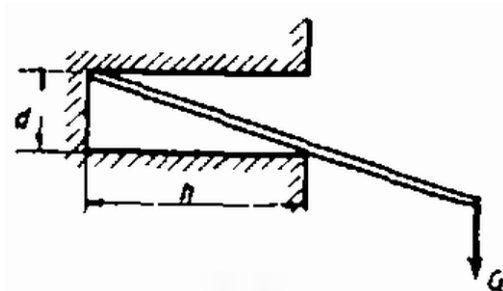
$$A \cdot 0,1 \text{ m} \cdot \rho \omega^2 \cdot 0,05 \text{ m} = A(100\,000 \text{ Pa} - 46\,600 \text{ Pa}).$$

Innen: $\omega = 28,02 \text{ s}^{-1}$.

A II. forduló feladatai

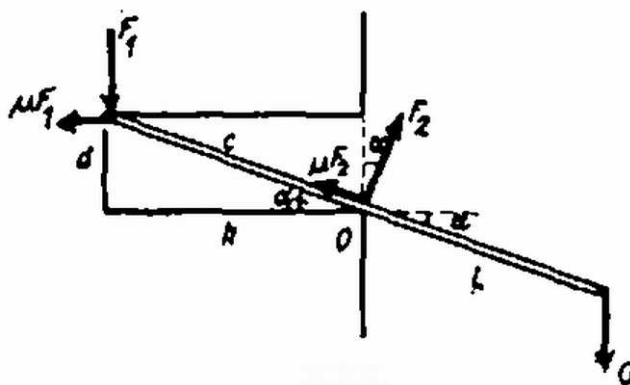
1. Egy falban $h = 6$ cm mély, $d = 2$ cm átmérőjű furatot készítünk és ebbe a furatba vékony, merev, elhanyagolható tömegű pálcát dugunk (5. ábra). A súrlódási együttható $\mu = 0,2$. Legalább milyen hosszú legyen a pálcá, hogy a végére akasztott ruha számára fogasként szolgálhasson?

(Nagy László)



5. ábra

Megoldás. A furat alakjára az α szög jellemző, $\text{tg } \alpha = d/h$ (6. ábra).



6. ábra

Legyen a rúd furatban levő részének hossza c , a falon kívül levő részének hossza L , a kabát súlya G . A megcsúszás kritikus helyzetében mindkét alátámasztási helyen igénybe van véve a maximálisan lehetséges súrlódási erő. Amíg ez a helyzet nem következik be, a feladat statikailag határozatlan.

A fal részéről a rúdra kifejtett erők: F_1 , μF_1 , F_2 , μF_2 . Az egyensúly feltétele, hogy a ható erők eredője és a forgatónyomaték nulla legyen. Az erőegyensúly a függőleges és vízszintes komponensekre:

$$G + F_1 - F_2 \cos \alpha - \mu F_2 \sin \alpha = 0,$$

$$F_2 \sin \alpha - \mu F_2 \cos \alpha - \mu F_1 = 0,$$

míg a forgatónyomatékok egyenlősége az O pontra vonatkozóan:

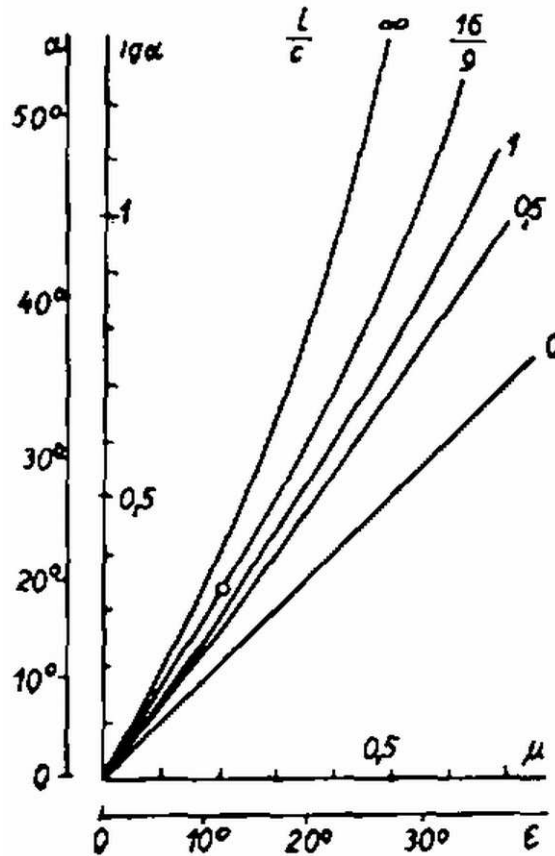
$$GL \cos \alpha = F_1 c \cos \alpha + \mu F_1 c \sin \alpha.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$F_1 = \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{2\mu \cos \alpha - (1 - \mu^2) \sin \alpha} \cdot G = \frac{5}{3}G = 1,667G,$$

$$F_2 = \frac{\mu}{2\mu \cos \alpha - (1 - \mu^2) \sin \alpha} \cdot G = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{10} \cdot G = 2,635G,$$

$$L = \frac{(1 + \mu \operatorname{tg} \alpha) (\operatorname{tg} \alpha - \mu)}{2\mu - (1 - \mu^2) \operatorname{tg} \alpha} \cdot c = \frac{16}{9}c = 1,778c.$$



7. ábra

A képletünk által adott L az a legközelebbi hely, ameddig a terhet közel lehet hozni a megcsúszás veszélye nélkül. Az L/c arány a lyuk alakjára jellemző α szög és a μ súrlódási együttható függvénye. Érdekes megnézni, hogy különböző L/c arányok esetében $\operatorname{tg} \alpha$, illetőleg α hogyan függ a μ súrlódási együtthatótól, illetve az ε súrlódási határszögtől ($\mu = \operatorname{tg} \varepsilon$). Feladatunkban $\operatorname{tg} \alpha = 1/3$ és $\mu = 0,2 = \operatorname{tg} 11,31^\circ$, az ezt jelentő helyet megtaláljuk a 7. ábra $L/c = 16/9$ -hez tartozó görbéjén egy ponttal jelölve. Ábránkról leolvasható, hogy $\varepsilon = \alpha$ esetében a terhet akárhová akaszthatjuk, mert ekkor $L/c = 0$. A másik határeset, amikor L/c végtelen, ez akkor következik be, ha

$$2\mu - (1 - \mu^2) \operatorname{tg} \alpha = 0$$

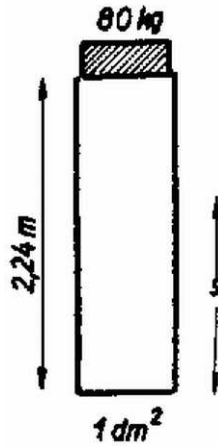
Ekkor nem készíthető ilyen módon fogas. Ennek az egyenletnek a megoldása $\operatorname{tg} \alpha = 2\mu/(1 - \mu^2)$. Ha arra gondolunk, hogy μ a súrlódási határszög tangense, akkor azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \varepsilon}{1 - \operatorname{tg}^2 \varepsilon} = \operatorname{tg} 2\varepsilon.$$

Tehát a furat alakjára jellemző a szög nem lehet nagyobb a súrlódási határszög kétszeresénél.

2. Egy 1 dm^2 alapterületű, $2,24$ méter magasságú hengerben 4 gramm hélium van 0°C hőmérsékleten és 10 newton/cm^2 nyomáson (8. ábra). A hengerbe beejtünk egy 80 kg tömegű dugattyút. Mennyi lesz a dugattyú legnagyobb sebessége? A súrlódást elhanyagolhatjuk. A folyamat olyan gyors, hogy a cső és a dugattyú hőfelvétele elhanyagolható. $g = 10 \text{ m/s}^2$. A hélium fajhő $c_v = 3,15 = \text{joule/gK}$, $c_p = 5,25 \text{ joule/gK}$.

(Dr. Bodó Zalán)



8. ábra

Megoldás. A legnagyobb sebességet akkor éri el a dugattyú, amikor gyorsulása nulla, vagyis a rá ható erők eredője zérus. A 80 kg tömegű dugattyú súlyából 8 newton/cm^2 nyomás származik, ez a külső légnyomással együtt 18 newton/cm^2 nyomást jelent. Tehát a gáz nyomásának a gyorsulásmentes pillanatban szintén 18 newton/cm^2 -nek kell lennie.

A gáz összenyomódása adiabatikus folyamat, a fajhők hányadosa $x = 5/3$. Az adiabata törvénye szerint:

$$10 \cdot 22,4^{5/3} = 18 \cdot V^{5/3},$$

innen a keresett térfogat: $V = 22,4 \cdot \left(\frac{10}{18}\right)^{3/5} = 15,74 \text{ dm}^3$.

Ekkor a T hőmérsékletre a gáztörvény alapján:

$$\frac{10 \cdot 22,4}{273 \text{ K}} = \frac{18 \cdot 15,74}{T}, \quad \text{így } T = 1,8 \cdot 0,7 \cdot 273 \text{ K} = 344 \text{ K} = 71 \text{ }^\circ\text{C}.$$

A dugattyúra ható külső erők (a külső légnyomás és a nehézségi erő) nagysága a dugattyú mozgása során állandó, tehát munkavégzésüket egyszerűen megkaphatjuk:

$$W = 1800 \text{ N} \cdot (2,24 - 1,75) \text{ m} = 1199 \text{ joule}.$$

Ez a munka részben melegíti a héliumot, részben pedig mozgási energiává alakul. A gáz belső energiájának a növekedése a hőmérsékletváltozásból számítható ki:

$$c_v m \Delta T = 3,15 \cdot 4,71 \text{ joule} = 895 \text{ joule}.$$

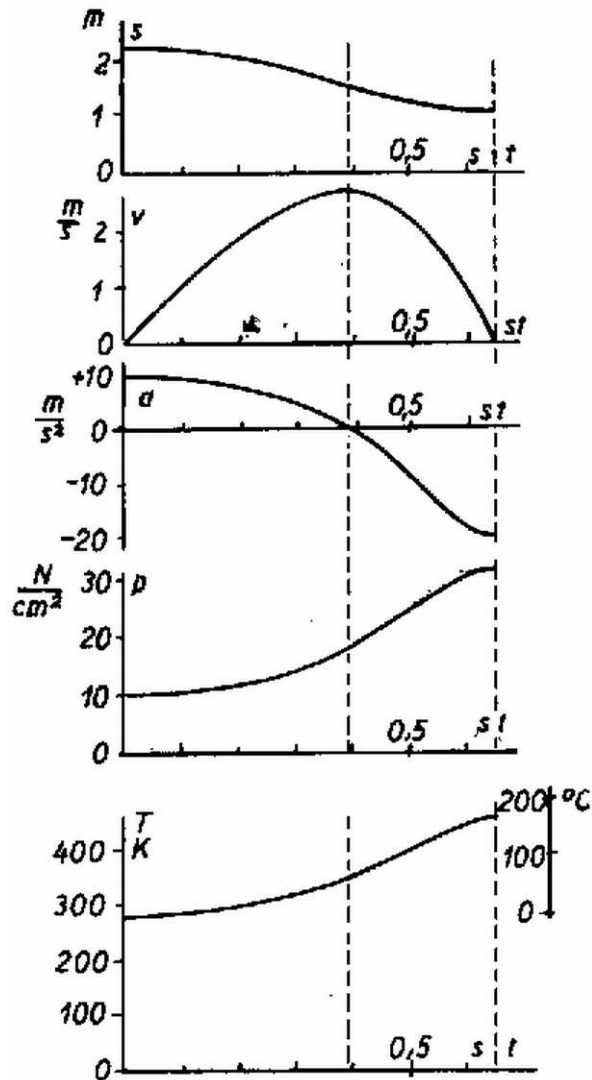
A dugattyú mozgási energiája tehát

$$(1199 - 895) \text{ joule} = 80(v^2/2),$$

innen

$$v = 2,76 \text{ m/s}.$$

A dugattyú sebességének a helytől való függését számítással is követni lehet; így is meghatározhatjuk a sebesség maximumát. A legmélyebb helyzet számítására szolgáló egyenlet magasabb fokú. A helynek, sebességnek, gyorsulásnak, nyomásnak, hőmérsékletnek az időtől való függését csak számítógépes eljárással lehet követni. Ennek a számolásnak az eredményét mutatja a 9. ábra.



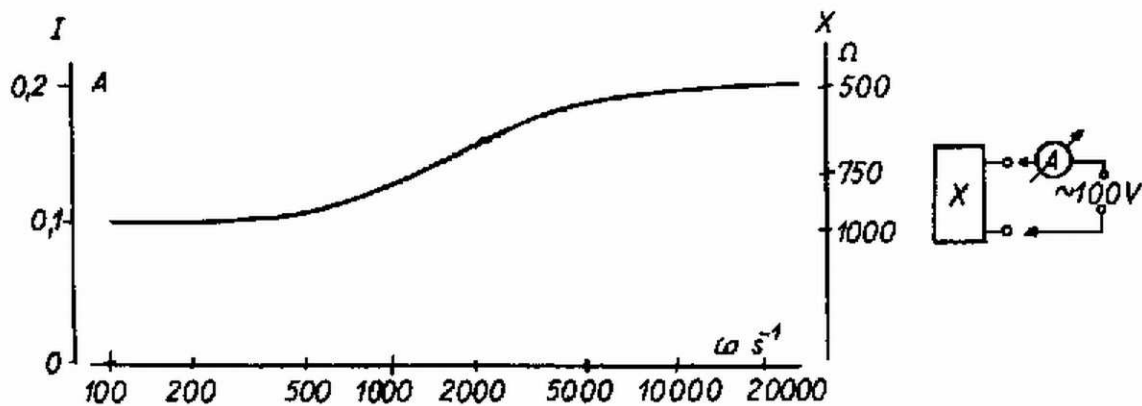
9. ábra

Látható, hogy a sebességmaximum kb. 0,395 másodperckor következik be. A dugattyú legmélyebb, 1,089 méteres helyzetét 0,654 másodperckor éri el, amikor is gyorsulása $-19,08 \text{ m/s}^2$, a nyomás ekkor $33,22 \text{ newton/cm}^2$, a hőmérséklet $168,2 \text{ }^\circ\text{C}$. A fékezés gyorsabban zajlik le, mint a felgyorsulás.

3. A feladat annak megállapítása, mi van az X jelzésű dobozban. Ezért a kivezetéseire különböző ω körfrekvenciájú váltófeszültséget kapcsolunk és mérjük a bemenő áramerősséget. A dobozra kapcsolt váltófeszültség mindvégig 100 V . A mérések eredményét a 10. ábra és a táblázat mutatja.

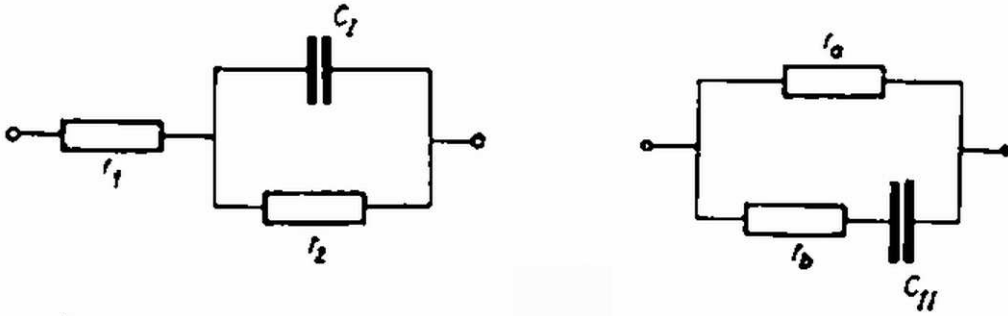
(Nagy László)

$\omega \text{ (s}^{-1}\text{)}$	100	200	500	1000	2000	5000	7500	10 000	20 000
$I \text{ (A)}$	0,1004	0,1015	0,1085	0,1265	0,1581	0,1894	0,1950	0,1971	0,1993



Megoldás. Az áramerősség adatait tanulmányozva látjuk, hogy az monoton menetű, nincs rezonanciára utaló szélsőérték, tehát nem lehet a dobozban egyszerre kondenzátor és önindukciós tekercs. Az áramerősségnek a frekvenciával együtt történő monoton növekedése, illetve az impedanciának a monoton csökkenése mutatja, hogy kondenzátor van a dobozban. Látható, hogy $\omega = 0$ esetében az impedancia 1000 ohm, $\omega \rightarrow \infty$ esetén a határértéke 500 ohm. Tehát a kondenzátoron átfolyó áramnak át kell folynia egy ellenálláson is, különben az impedancia határértéke $\omega \rightarrow 0$ esetén ∞ , $\omega \rightarrow \infty$ esetén 0 volna.

Két lehetőséget mutatunk meg, melyek között a mérési adatok alapján nem lehet dönteni (11. ábra).



11. ábra

I. Ekkor az $\omega = 0$ esetből $r_1 + r_2 = 1000$ ohm adódik és $\omega \rightarrow \infty$ alapján $r_1 = 500$ ohm. Az egyenletrendszer megoldása: $r_1 = r_2 = 500$ ohm.

II. Ekkor az $\omega = 0$ esetből $r_a = 1000$ ohm, és $\omega \rightarrow \infty$ alapján

$$r_a r_b : (r_a + r_b) = 500 \text{ ohm.}$$

A kapacitás meghatározása céljából le kell vezetni az impedancia ω -tól való függését.

I. esetben az eredő ellenállás

$$X = \frac{(r_1 + r_2)^2 + (\omega r_1 r_2 C_1)^2}{1 + (\omega C_1 r_2)^2};$$

ha ide a táblázat alapján számolt (ω, X) értékpárt behelyettesítjük, akkor kapjuk a kondenzátor kapacitására:

$$C_1 = 2 \mu\text{F.}$$

A II. esetben az eredő ellenállás

$$X = r_a \frac{1 + (\omega C_{11} r_b)^2}{1 + [\omega C_{11} (r_a + r_b)]^2}.$$

A táblázat alapján számolt valamely (ω, X) értékpárt ide helyettesítve kapjuk a kondenzátor kapacitásának ilyenkor érvényes nagyságát:

$$C_{11} = 0,5 \mu\text{F}$$

III. kísérleti forduló

A feladat két folyadék elegye sűrűségének tanulmányozása volt a koncentrációtól való függésben. Ezután a felületi feszültségnek a koncentrációtól való függését kellett megvizsgálni.