Azt fogjuk felhasználni, hogy az a és b féltengelyekkel bíró ellipszis ($b < a$) előállítható a főköréből a nagytengelyre merőleges irányú, b/a arányú összenyomással, vagyis ha a nagytengely mint átmérő fölötti kör tetszőleges K pontjának a nagytengelyen levő (merőleges) vetülete V, akkor a VK szakasznak a $VE = \frac{b}{a}VK$ egyenlőséget teljesítő E pontja az ellipszisen van; továbbá fordítva, az ellipszis bármely E pontjának a nagytengelyen levő vetületét V-vel jelölve, a VE félegyenesnek az a K pontja, amelyre $VK = \frac{a}{b}VE$, a főkörön van. – Szemléletesség kedvéért ellipszisünk kistengelyét függőlegesen tartjuk, így nagytengelye – mint egyenes – vízszintes síkot ír le a forgatás folyamán; ezt egyenlítősíknak fogjuk nevezni, a nagytengely két végpontja által leírt kört pedig az ellipszoid egyenlítőkörének. Továbbá ellipszisünk síkja minden helyzetben függőleges és az ellipszoid vizsgálandó metszősíkjai is függőlegesek.

Forgassuk ellipszisünkkel a főkörét is, ez gömböt ír le — nevezzük jellegzetesebb szóval főgömbnek. – Azt mondhatjuk, hogy az ellipszoid a főgömbből a fenti értelemben függőleges irányú, b/a arányú összenyomással áll elő, V helyén a pontoknak mindig az egyenlítősíkon levő vetületét értve. Ebbe a megállapításba már azt is beleértettük, hogy akár az ellipszoid, akár a főgömb tetszőleges pontjából kiindulva a rajta átmenő függőleges (azaz vetítő-) egyenesen *van* pontja a főgömbnek, illetve az ellipszoidnak, mégpedig az egyenlítősíknak ugyanazon az oldalán, mint a kiindulási pont. Ezt a pontot úgy kapjuk, hogy vesszük a kiindulási ponton és a forgástengelyen átmenő síkot, ez az ellipszoidból és a főgömbből a mozgó ellipszisnek és főkörnek egy összetartozó helyzetét metszi ki, állításunk síkbeli megfelelőjét pedig eleve ismertnek vettük.

Ezek után bizonyításul csak arra hivatkozunk, hogy minden függőleges S sík – ha metszi az ellipszoidot –, akkor metszi a főgömböt is, éspedig olyan k körben, amelynek középpontja az egyenlítősíkban van, hiszen a metszetkör középpontját S-ből az a rá merőleges egyenes metszi ki, amely átmegy a főgömb középpontján, ez pedig merőleges a forgástengelyre, tehát vízszintes helyzetű. A metszetkörnek az egyenlítősíkban levő átmérője az egyenlítőkörnek az a húrja, amely rajta van S és az egyenlítősík m metszésvonalán. Mármost az ellipszoid és S közös pontjainak halmaza k-ból az m-re merőleges irányú, b/a arányú összenyomással áll elő, tehát ellipszis.

A feladat állításához képest többleteredményként azt is megkaptuk, hogy a vizsgált metszetellipszisek hasonlóak a megforgatott ellipszishez, ezen azt értve, hogy tengelyeik aránya egyenlő.

Páles Zsolt (Sátoraljaújhely, Kossuth L. Gimn.)

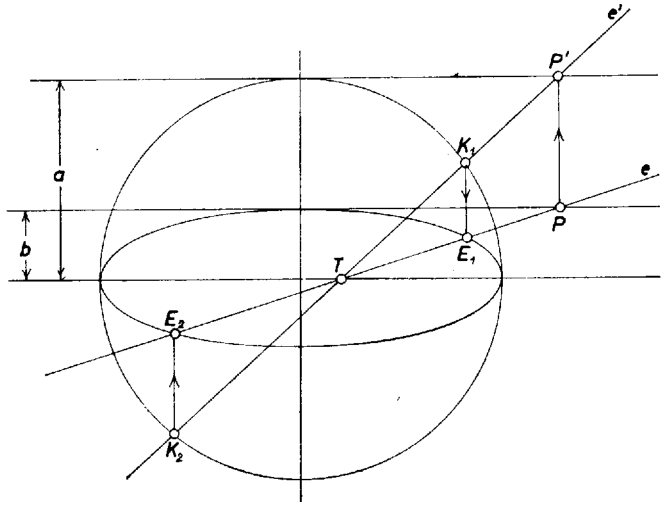
Megjegyzések. 1. Az érkezett dolgozatok többsége térbeli koordináta-rendszert használt, az ellipszoidra és a metsző síkra egyenletet írt fel, és e két egyenlet együttesét értelmezte ellipszisként. Lépéseik többnyire nem kifogásolhatók – és ezért elfogadtuk őket –, de bizonyos ösztönös, ki nem mondott általánosításokra, kiterjesztésekre is támaszkodnak. Az is hiányzik, hogyan kapható a metsző síkban az a koordináta-rendszer, amelynek felhasználásával adódik a metszésvonalnak ellipszis mivolta.

Ajánljuk olvasóinknak, válasszák el az ellipszisről, hiperboláról, paraboláról alkotott fogalmukat a koordinátarendszertől. A kúpszeletek léteznek, vizsgálhatók koordinátageometria nélkül is, tisztán geometriai módon. Ezzel nem kívánjuk kisebbíteni a koordinátageometria jelentőségét, csak a helytelen túlértékelés ellen szólunk.

2. Azt is be lehet látni, hagy az ellipszoid minden síkmetszete ellipszis – a forgástengelyre merőleges sík esetében természetesen speciálisan kör. Alább ezt vázoljuk, előkészítve a megfelelő síkbeli feladat szemléletes tárgyalásával.

Ellipszispontnak a főkör egy pontjából való „összenyomásos” szerkesztése értelmezhető úgy is, hogy keressük az ellipszis metszéspontját egy, a nagytengelyére merőleges e egyenessel (de a szimmetria miatt elég az egyiket szerkeszteni, a másik ennek tükörképe). Az e-n levő K főköri pont puszta kijelölése elé iktassuk be a következő gondolatot. Tudjuk, hagy az e-n levő, keresett E ellipszispont a/b arányú nyújtással „feljut” a főkörre, ezért e-nek *minden pontját* megnyújtjuk a/b-szeresen, és azt keressük meg, melyik megnyújtott pont esik a főkörre, a K-ba. Itt az *e minden pontjának megnyújtása* címén semmit sem kell rajzolnunk, mert a tengelyre merőleges e „önmagán” nyúlik meg.

Ez a kiegészített gondolat a tengelyhez hajló e egyenes metszéspontjainak meghatározására is alkalmas. Itt viszont jellegzetesebb az ábra azzal, hogy e minden pontját megnyújtva tőle különböző e' egyenest kapunk. Evégett elég nyújtani egyetlen P pontját, hiszen a tengelyen levő T pontja nyújtva is helyben marad. (Az ábrán a tengelytől b-re levő P-t nyújtottuk, így a P' kép a távolságra lesz.) Megrajzolva e'-t, K_1, K_2 „újraösszenyomása” abból áll, hogy merőlegesen „visszavetítjük” őket e-re.



Mármost, újra a térben: ha az ellipszoid forgási tengelyéhez ferdén hajló S sík metszi az ellipszoidot, vagyis vannak közös (felületi) pontjaik legyen egy ilyen P –, akkor ezekhez tartoznak pontok a főgömb felületén, ezeket kívánjuk megkeresni.

A P közös ponthoz a főgömbön tartozó P' pont a/b-szer távolabb van az egyenlítősíktól, mint P. A P' pontok halmazának megkereséséhez S-nek minden pontját megnyújtjuk a/b-szeres távolságra. Ezek egy újabb, az S-től különböző S' síkot adnak. A főgömböt S' körben metszi, ezt a kört a főtengely irányában S-re visszavetítve, ellipszist kapunk, és ez a keresett metszet.

Nem bizonyítottuk többek között, hogy egyenes, illetve sík pontjait nyújtva egyenest, síkot kapunk, hogy körnek egy másik síkra való *nem* merőleges vetülete is ellipszis. – Nem használtuk az „affinitás” nevet, bár az ábrabeli szerkesztés affinitásos szerkesztés. Azonban még a síkbeli affinitás legfontosabb tulajdonságait is csupán bizonyítás nélkül ismerjük a tankönyvből, térről viszont ott szó sem volt. A síkra merőleges nyújtást viszont még a térben is könnyű elképzelni.