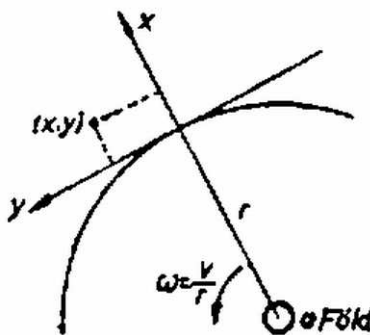


Feladatunk (lásd lapunk 234. oldalán) egy háromtest probléma leegyszerűsített esete, amelyben az egyik test (a Föld) szerepe elhanyagolható, a másik két test (az űrhajó és a „kitett test”) relatív mozgása pedig egydimenziós mozgásnak tekinthető. Ezek az egyszerűsítési lehetőségek annak köszönhetőek, hogy az űrhajó és a kitett test közel azonos pályán mozog (ha a testet a pálya mentén tettük ki), és a távolságuk csak a kölcsönös vonzás hatására változik. Ha a testet nem a pálya mentén rakjuk ki, az űrhajó és a kitett test különböző pályákon mozog, ezeken a pályákon az egyes testek sebessége lehet más és más, és megeshet, hogy a kis test a gravitáció nélkül is hamar utoléri az űrhajót vagy pedig a vonzás ellenére sem találkoznak, a kitett test elkerüli az űrhajót, vagy éppenséggel lemarad tőle. Ezeket a lehetőségeket szeretnénk részletesen megvizsgálni. A háromtest probléma általános tárgyalására nem vállalkozunk, csak azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor az űrhajó és a kitett test nem távolodik el túlságosan egymástól és a sebességük is közel azonos, tovább feltételezzük, hogy a közös tömegközéppontjuk a feladatban megadott  $v$  sebességhez tartozó  $r$  sugarú körpályám mozog.

Programunk a következő. Hogy ne kelljen a két test Föld körüli mozgását figyelemmel kísérenünk, olyan koordináta-rendszerben fogunk dolgozni, amelynek kezdőpontja az  $r$  sugarú pályán  $v$  sebességgel kering a Föld körül, egyik tengelye pedig mindig a Föld irányába mutat (1. ábra).



1. ábra

És a koordináta-rendszer nem inerciarendszer, ezért ahhoz, hogy Newton II. törvényét alkalmazhassuk, meg kell határoznunk a mozgás jellemzőit egy alkalmasan választott inerciarendszerben is. Miután azt megtettük, szétválasztjuk a tömegközéppont és a relatív koordináták egyenleteit, és külön-külön megoldjuk őket. Végül elemezni fogjuk az űrhajó és a kitett test egymáshoz viszonyított mozgását.

#### A mozgásegyenletek a Föld körül keringő koordináta-rendszerben

Jelölje az egyes testek koordinátáit, sebességét és gyorsulását  $(x_{1,2} : y_{1,2})$   $(v_{x1,2}; v_{y1,2})$  ill.  $(a_{x1,2}; a_{y1,2})!$  Mivel Newton II. törvénye az  $F = ma$  formában csak állandó sebességű koordináta-rendszerben igaz, ahhoz, hogy alkalmazhassuk, meg kell határoznunk az egyes testek mozgásának jellemzőit egy alkalmasan választott inerciarendszerben is. Legyen ez az inerciarendszer az, amelyik a vizsgált időpillanatban egybeesik a forgó rendszerünkkel, de abban különbözik tőle, hogy áll! Az ebben a rendszerben mérhető koordinátákat, sebességeket, illetve gyorsulásokat vesszővel fogjuk megkülönböztetni a forgó rendszerben felvett értékektől. Nyilván a vizsgált időpillanatban a két rendszerben a koordináták azonosak:

$$(1) \quad x = x', \quad y = y'$$

Nem így a pillanatnyi sebességek és gyorsulások:

$$(2) \quad v'_x = v_x - \omega y, \quad v'_y = v_y + (r + x)\omega$$

A korrekciók abból adódnak, hogy a forgó koordináta-rendszer  $(x; y)$  pontjának a sebessége az álló rendszerben  $[-\omega y; \omega(r + x)]$ . Mivel  $(v_x; v_y)$  az ehhez a ponthoz viszonyított sebesség, hogy  $(v'_x; v'_y)^{-t}$  megkapjuk, a két vektort össze kell adnunk. Hasonlóan kell eljárunk a gyorsulásokkal is, bár a helyzetünk itt egy kicsit nehezebb. Igen kicsiny  $\Delta t$  idő alatt a forgó koordináta-rendszerben a test sebessége  $(a_x \Delta t; a_y \Delta t)$ -vel változik, míg a koordinátáinak a változása  $(v_x \Delta t; v_y \Delta t)$ . Vezessünk be egy kettős vesszővel jelzett koordináta-rendszert, amely a forgó rendszer  $t + \Delta t$  időpillanatbeli helyzetével esik egybe. Ebben a rendszerben a  $t + \Delta t$  időpontban

$$(3) \quad \begin{aligned} v''_x &= (v_x + a_x \Delta t) - \omega(y + v_y \Delta t); \\ v''_y &= (v_y + a_y \Delta t) + \omega(r + x + v_x \Delta t) \end{aligned}$$

sebességeket fogunk látni. Mivel a vesszős és a kétvesszős koordináta-rendszer egymáshoz képest  $\omega \Delta t$ -vel el van forgatva,  $(v''_x; v''_y)$  az egyvesszős rendszerben

$$(4) \quad \begin{aligned} v'_x(t + \Delta t) &= v''_x - (\omega \Delta t) v''_y, \\ v'_y(t + \Delta t) &= v''_y - (\omega \Delta t) v''_x. \end{aligned}$$

(3)-at (4)-be helyettesítve [és a  $(\Delta t)^2$ -tel arányos tagokat elhagyva] azt találjuk, hogy a test sebessége a  $t + \Delta t$  pillanatban a vesszős rendszerben

$$(5) \quad \begin{aligned} v'_x(t + \Delta t) &= (v_x + a_x \Delta t) - \omega(y + v_y \Delta t) - (\omega \Delta t)[v_y + (r + x)\omega], \\ v'_y(t + \Delta t) &= (v_y + a_y \Delta t) + \omega(r + x + v_x \Delta t) + (\omega \Delta t)(v_x - \omega y). \end{aligned}$$

Innen leolvasható, hogy a gyorsulás a vesszős koordináta-rendszerben

$$(6) \quad \begin{aligned} a'_x &= \frac{v'_x(t + \Delta t) - v_x}{\Delta t} = a_x - 2\omega v_y - \omega^2(r + x), \\ a'_y &= \frac{v'_y(t + \Delta t) - v_y}{\Delta t} = a_y + 2\omega v_x - \omega^2 y. \end{aligned}$$

Most már felírhatjuk Newton törvényét a  $t$  időpillanatban a vesszős rendszerben

$$(7) \quad \begin{aligned} m_1 a'_{x1} &= -\frac{\gamma M m_1 (r + x'_1)}{[(r + x'_1)^2 + y_1'^2]^{3/2}} - \frac{\gamma m_1 m_2 (x'_1 - x'_2)}{[(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2]^{3/2}}, \\ m_1 a'_{y1} &= -\frac{\gamma M m_1 y'_1}{[(r + x'_1)^2 + y_1'^2]^{3/2}} - \frac{\gamma m_1 m_2 (y'_1 - y'_2)}{[(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2]^{3/2}}, \\ m_2 a'_{x2} &= -\frac{\gamma M m_2 (r + x'_2)}{[(r + x'_2)^2 + y_2'^2]^{3/2}} - \frac{\gamma m_1 m_2 (x'_2 - x'_1)}{[(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2]^{3/2}}, \\ m_2 a'_{y2} &= -\frac{\gamma M m_2 y'_2}{[(r + x'_2)^2 + y_2'^2]^{3/2}} - \frac{\gamma m_1 m_2 (y'_2 - y'_1)}{[(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2]^{3/2}}; \end{aligned}$$

azaz (1) és (6) felhasználásával

$$(8) \quad \begin{aligned} m_1 [a_{x1} - 2\omega v_{y1} - \omega^2(r + x_1)] &= -\frac{\gamma M m_1 (r + x_1)}{[(r + x_1)^2 + y_1^2]^{3/2}} - \frac{\gamma m_1 m_2 (x_1 - x_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{3/2}}, \\ m_1 (a_{y1} + 2\omega v_{x1} - \omega^2 y_1) &= -\frac{\gamma M m_1 y_1}{[(r + x_1)^2 + y_1^2]^{3/2}} - \frac{\gamma m_1 m_2 (y_1 - y_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{3/2}}, \\ m_2 [a_{x2} - 2\omega v_{y2} - \omega^2(r + x_2)] &= -\frac{\gamma M m_2 (r + x_2)}{[(r + x_2)^2 + y_2^2]^{3/2}} - \frac{\gamma m_1 m_2 (x_2 - x_1)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{3/2}}, \\ m_2 (a_{y2} + 2\omega v_{x2} - \omega^2 y_2) &= -\frac{\gamma M m_2 y_2}{[(r + x_2)^2 + y_2^2]^{3/2}} - \frac{\gamma m_1 m_2 (y_2 - y_1)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{3/2}}; \end{aligned}$$

Használjuk ki, hogy az  $x$ -ek és az  $y$ -ok kicsik, továbbá azt, hogy  $\omega$  éppen az  $r$  sugarú pályán való keringés szögsebessége:

$$(9) \quad \omega^2 = \frac{\gamma \cdot M}{r^3},$$

$$(10) \quad \omega^2 - \frac{\gamma \cdot M}{[(r + x)^2 + y^2]^{3/2}} = \omega^2 \left[ 1 - \frac{1}{\left[ \left(1 + \frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 \right]^{3/2}} \right] \cong 3\omega^2 (x/r).$$

(10) utolsó lépésében kihasználtuk az  $(x/r)^2 \sim (y/r)^2$  rendig pontos

$$(11) \quad \begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 &\cong 1 + \frac{2x}{r}, & \left(1 + \frac{2x}{r}\right)^{1/2} &\cong 1 + \frac{x}{r}, \\ \left(1 + \frac{x}{r}\right)^3 &\cong 1 + \frac{3x}{r}, & \left(1 + \frac{3x}{r}\right)^{-1} &\cong 1 - \frac{3x}{r}, \end{aligned}$$

közelítő azonosságokat. (10) alapján a (8) egyenletek

$$\begin{aligned}
 (a_{x1} - 2\omega v_{y1}) &= 3\omega^2 x_1 - \frac{\gamma m_2 (x_1 - x_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{3/2}}, \\
 (a_{y1} + 2\omega v_{x1}) &= -\frac{\gamma m_2 (y_1 - y_2)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{3/2}}, \\
 (12) \quad (a_{x2} - 2\omega v_{y2}) &= 3\omega^2 x_2 - \frac{\gamma m_1 (x_2 - x_1)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{3/2}}, \\
 (a_{y2} + 2\omega v_{x2}) &= -\frac{\gamma m_1 (y_2 - y_1)}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{3/2}},
 \end{aligned}$$

alakra hozhatók, ahol az  $x^2/r$ , ill.  $x \cdot y/r$ -rel arányos tagokat elhagytuk. Ezen tagok elhagyása miatt nem kell aggódnunk, hisz gondoljuk meg, hogy a feladatban megadott sebesség  $10^8$  m nagyságrendű  $r$ -nek felel meg. Ha  $x$  és  $y$  néhány száz méter nagyságrendű, akkor is  $x/r \sim y/r$  még mindig csak  $10^{-5}$  nagyságrendű. Ennyiszor kisebbek az elhagyott tagok a megtartott  $3\omega^2 x_{1,2}$  nél.

A (12) egyenletek helyett vezessük be a tömegközéppont és a relatív koordináták egyenletét:

$$\begin{aligned}
 (13) \quad A_x - 2\omega V_y &= 3\omega^2 X \\
 A_y + 2\omega V_x &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (14) \quad a_x - 2\omega v_y &= 3\omega^2 x - \frac{\gamma(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cdot x, \\
 a_y + 2\omega v_x &= -\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cdot y
 \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 (15) \quad X &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, & Y &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} \\
 V_x &= \frac{m_1 v_{x1} + m_2 v_{x2}}{m_1 + m_2}, & V_y &= \frac{m_1 v_{y1} + m_2 v_{y2}}{m_1 + m_2} \\
 A_x &= \frac{m_1 a_{x1} + m_2 a_{x2}}{m_1 + m_2}, & A_y &= \frac{m_1 a_{y1} + m_2 a_{y2}}{m_1 + m_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (16) \quad x &= x_1 - x_2, & y &= y_1 - y_2, \\
 v_x &= v_{x1} - v_{x2}, & v_y &= v_{y1} - v_{y2}, \\
 a_x &= a_{x1} - a_{x2}, & a_y &= a_{y1} - a_{y2}.
 \end{aligned}$$

A fenti egyenletek a forgó koordináta-rendszerbeli koordináták, sebességek és gyorsulások között a  $t$  időpillanatban fennálló kapcsolatot írják le. Mivel ez a  $t$  időpont lehet bármelyik, (13)-nak és (14)-nek minden időpillanatban teljesülnie kell. Meg kell tehát keresnünk azokat az  $X(t)$ ,  $Y(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$  függvényeket, amelyekre igaz, hogy a belőlük kapható pillanatnyi sebességek és gyorsulások a (13)–(14) egyenleteknek minden időpillanatban eleget tesznek.

*A közös tömegközéppont mozgása*

A tömegközéppont mozgását a (13) egyenletek írják le. (13) második egyenlete így írható:

$$\frac{d}{dt}(V_y + 2yX) = 0,$$

tehát

$$(17) \quad V_y + 2\omega X = C,$$

ahol  $C$  állandó, ez az összefüggés fennáll minden pillanatban. Ezt behelyettesítve az  $A_x$  egyenletébe az

$$(18) \quad A_x = -\omega^2 \left( X - \frac{2C}{\omega} \right)$$

egyenletet kapjuk, amelyben a  $2C/\omega$  körül végbemenő  $\omega$  körfrekvenciájú harmonikus rezgés egyenletét ismerhetjük fel. Ennek megfelelően

$$(19) \quad \begin{aligned} X &= D \cos(\omega t + \varphi) + \frac{2C}{\omega}. \\ V_x &= -D\omega \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

$X$ -et (17)-be visszahelyettesítve

$$(20) \quad V_y = -2D\omega \cos(\omega t + \varphi) - 3C$$

adódik, ami nem más, mint egy  $-3C$  sebességű egyenletes mozgás és egy  $2D$  amplitúdójú,  $\omega$  körfrekvenciájú harmonikus rezgés eredőjének a sebesség-kifejezése, így

$$(21) \quad Y = -2D \sin(\omega t + \varphi) - 3Ct + E.$$

A (19)–(21) egyenletekben szereplő állandókat úgy kell megválasztanunk, hogy  $X(t), Y(t), V_x(t), V_y(t)$  a  $t = 0$  időben az előre megadott  $X_0, Y_0, V_{x0}, V_{y0}$  értékeket vegye fel, azaz

$$(22) \quad \begin{aligned} C &= 2\omega X_0 + V_{y0}, & E &= Y_0 - \frac{2}{\omega} V_{x0} \\ D &= \left[ \left( \frac{V_{x0}}{\omega} \right)^2 + \left( \frac{2V_{y0}}{\omega} + 3X_0 \right)^2 \right]^{1/2}, & \varphi &= \arctg \frac{V_{x0}}{3\omega X_0 + 2V_{y0}}. \end{aligned}$$

Könnnyen belátható, hogy ha az űrhajóból a testet csak belső erők segítségével juttatjuk ki (pl. kilökjük, de nem használunk kis rakétát, ahol erő hat a test és az elszabaduló gáz között is), (13) igaz a kijuttatás alatt is, tehát az időmérést kezdhetjük a test kijuttatása előtt. Ekkor azonban  $X_0 = Y_0 = 0, V_{x0} = V_{y0} = 0$  (a koordináta-rendszerünket így vettük fel), és leolvasható, hogy  $X, Y, V_x, V_y$  továbbra is 0 marad. Nem ez a helyzet ha a kijuttatás során külső erők is hatnak! Akkor a súlypont sebessége és a koordinátái is megváltoznak a kijuttatás végére, és a további mozgás leírásához a (19)–(22) egyenleteket kell használnunk. Nem részletezzük az elemzést, csak megjegyezzük, hogy ebben az esetben a (19)–(22) egyenletek olyan mozgást írnak le, amely az egyenleteink pontosságán belül megegyezik egy olyan ellipszis pályán való mozgással, amelyet a Földhöz rögzített álló koordináta-rendszerbeli  $[(X_0 + r); Y_0]; [V_{x0} - \omega Y_0; V_{y0} + (r + X_0)\omega]$  kezdeti értékek meghatároznak.

#### *Az űrhajó és a kitett test egymáshoz viszonyított mozgása*

A relatív koordináták mozgását a (14) egyenletek írják le. Ezekkel sajnos nem olyan könnyű a helyzetünk, mint a súlypont esetében volt: egyenleteink megoldását nem tudjuk olyan szép zárt alakban megadni. Megvan azonban a lehetőségünk, hogy a pillanatnyi sebesség és gyorsulás definícióját felhasználva a pályát pontról pontra kiszámoljuk! Ha egy pillanatban a koordináták  $x(t)$  és  $y(t)$ , a sebességek pedig  $v_x(t)$  és  $v_y(t)$ , akkor egy igen kicsiny  $\Delta t$ -vel később a koordináták

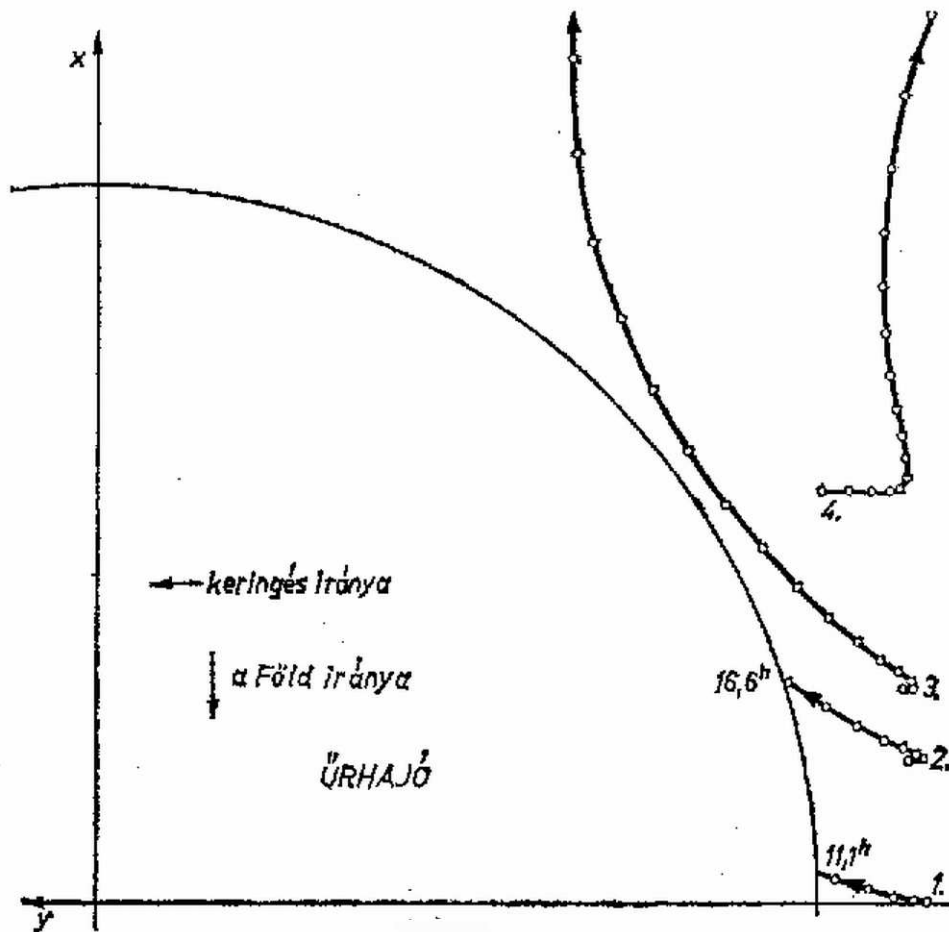
$$(23) \quad \begin{aligned} x(t + \Delta t) &= x(t) + v_x(t)\Delta t, \\ y(t + \Delta t) &= y(t) + v_y(t)\Delta t. \end{aligned}$$

Hasonló módon

$$(24) \quad \begin{aligned} v_x(t + \Delta t) &= v_x(t) + a_x(t)\Delta t, \\ v_y(t + \Delta t) &= v_y(t) + a_y(t)\Delta t, \end{aligned}$$

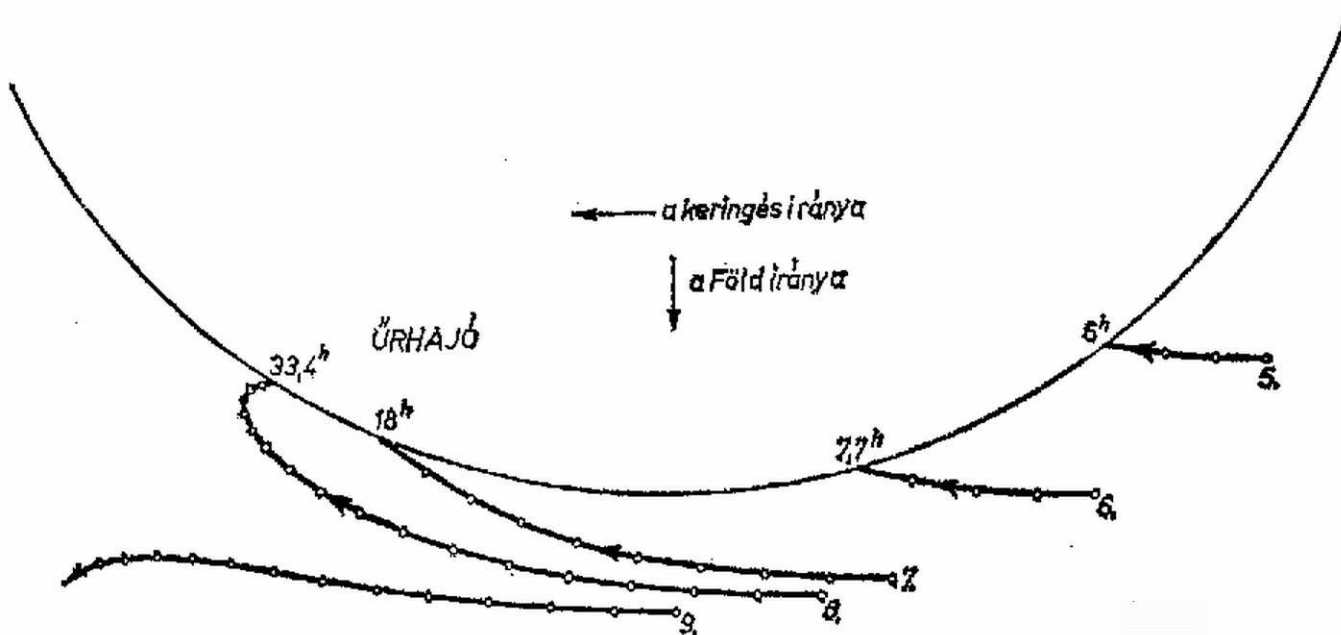
ahol  $a_x(t)$ -t és  $a_y(t)$ -t  $[x(t); y(t)]$  és  $[v_x(t); v_y(t)]$  ismeretében (14) segítségével számoljuk. Ilyen módon kellő türelemmel a pályát tetszőleges pontossággal kiszámíthatjuk: minél kisebbre választjuk  $\Delta t$ -t, annál pontosabban kapjuk meg a pályát. ((23) helyett használhatnánk a  $x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t)\Delta t + a_x(t)(\Delta t)^2/2$  kifejezést is, de ez nem lényeges, mert  $\Delta t$ , finomításával mindkét módszer ugyanarra az eredményre vezet; mint ahogy erről bárki meggyőződhet pl. az egyenletesen gyorsuló mozgás esetében.)

Ilyen módszerrel vettük fel a 2–4. ábrákon látható pályagörbéket.



2. ábra

A pályákat olyan koordináta-rendszerben ábrázoltuk, amelynek a középpontja egybeesik az űrhajóéval, az  $x$  tengely negatív fele pedig mindig a Föld felé mutat. (Ebben a rendszerben Föld középpontja mindig az  $x = -r$ ,  $y = 0$  pontban van.) A pályákon jelölt pontok az indítástól eltelt páros órákat jelölik. A kis testet mindig az űrhajó falától 3 m-re (az origótól 22 m-re) indítottuk különböző helyzetekből, különböző sebességekkel. Az 1–9. számú pályáknál (2. és 3. ábra) úgy vettük, hogy az álló koordináta-rendszerben mindkét test kezdeti sebességének a nagysága a feladatban megadott érték legyen, de a sebességvektor mindkét testnél az illető testet a Föld középpontjával összekötő sugárra merőleges legyen.



3. ábra

(2) és (16) segítségével megállapítható, hogy

$$(25) \quad \begin{aligned} v_x &= (v'_{x1} - v'_{x2}) + \omega y, \\ v_y &= (v'_{y1} - v'_{y2}) - \omega x. \end{aligned}$$

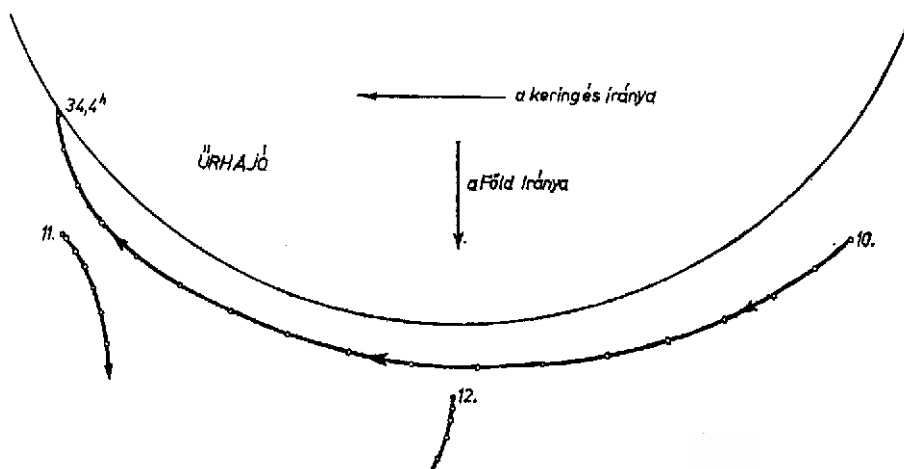
Egyszerű geometriai megfontolásokkal belátható, hogy ilyenkor  $v'_{y1} - v'_{y2}$  elhanyagolhatóan kicsi még az  $\omega x$  mellett is, viszont  $v'_{x1} - v'_{x2}$  nem:

$$(26) \quad v'_{x1} - v'_{x2} = -v \cdot \frac{y}{r+x} \approx -\omega y.$$

Tehát ezeknél a görbéknel

$$(27) \quad v_{x0} = 0, \quad v_{y0} = -x_0\omega.$$

A 4. ábra 10. számú görbéjénél azt tettük fel, hogy a két test sebessége az álló koordináta-rendszerben nemcsak azonos nagyságú, hanem párhuzamos is. (Ez érvényes a 9. számú görbére is.)



4. ábra

Ilyenkor nyilván (25) alapján

$$(28) \quad v_{x0} = \omega y_0, \quad v_{y0} = -\omega x_0.$$

A 11. és 12. pálya felvételénél a  $v_{x0} = 0, v_{y0} = 0$  kezdeti feltételt alkalmaztuk. (Ez érvényes az 1. sz. pályára is.)

Feltűnő, hogy mennyire különböznek egymástól a különböző helyzetből induló pályák, illetve az azonos helyzetből különböző kezdeti sebességgel indulók. Pedig, és ezen érdemes elgondolkodni, ezek a kezdeti feltételek nagyon kicsiny sebességkülönbségeket jelentenek. Ezeknek a sebességeknek az egyes testek álló koordináta-rendszerbeli sebességéhez való viszonya kb.  $x/r \approx 10^{-7}$  nagyságrendű; néhány arasz per óra nagyságúak a néhány ezer km/h pályamenti sebességek mellett. És mégis mennyire függ tőlük a két test relatív mozgása! Azért, hogy ennek finom részleteit nyomon tudjuk követni, le kellett a mozgásról a pályamenti nagy léptékű mozgást választani úgy, hogy a pálya mentén mozgó koordináta-rendszerben írjuk le az egyes testeket.

Érdeemes részletesebben meggondolni, miért adódnak ilyen pályák. Legmeglepőbbek a 3–4. sz., illetve a 11–12. sz. pályák: a kis test ahelyett, hogy közelebb kerülne a gömbhöz, távolodik tőle. A megoldás a (14) első egyenletének a jobb oldala.  $(x^2 + y^2)^{1/2} = 22$  m-nél

$$(29) \quad 3\omega^2 - \frac{\gamma(m_1 + m_2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

pozitív! Tehát ez az „erő” növelni igyekszik az  $x$ -et, ha az pozitív, és csökkenteni, ha negatív. Ennek oka a  $3\omega^2 x$ -es tag, ami nem más, mint a Föld vonzásából eredő gyorsulás és az  $\omega$  körfrekvenciájú körmozgáshoz szükséges centripetális gyorsulás különbsége a Földtől  $r + x$  távolságra. (Koordináta-rendszerünket éppen úgy vettük föl, hogy ez a két tag az origóban legyen egyenlő.) Ha megnézzük,  $d_0 = 14,7$  m-re kellene megközelíteni az űrhajó középpontját ahhoz, hogy (29) negatív legyen. Ennél nagyobb távolságban az űrhajó vonzásának az  $x$  irányú része nem elegendő, hogy a Föld vonzását kiegészítve ( $x > 0$ ) vagy lecsökkentve ( $x < 0$ ) a kis testet  $\omega$  körfrekvenciával  $r + x$  sugarú pályához

csak a Föld terében  $x > 0$  esetén  $\omega' < \omega$ , és  $x < 0$  esetén  $\omega' > \omega$  körfrekvencia tartozik), ezért a kis test egyre kijjebb sodródik, vagy egyre beljebb esik. De miért nem látszik ez a hatás az 5–9. sz. pályákon? A megoldás egyszerű, nem vettünk figyelembe még minden tagot, olyanokat, amelyeknek ott lényeges szerepe van. Ezek a tagok a (14) egyenletek bal oldalán szereplő  $-2\omega v_y$ , ill.  $2\omega v_x$  tagok. A jobb oldalra átvive őket olyan erőnek felelnek meg, amelyek a sebességet önmagára merőlegesen igyekeznek elforgatni (ez az ún. „Coriolis erő”, a koordináta-rendszer forgásából ered, igazából a koordináta-rendszer fordul el a sebességvektorhoz képest). Láthatjuk, hogy a ha  $v_y$  elég nagy, akkor ez a tag kompenzálni tudja a  $3\omega^2 x$  tag „taszítását”. Az, hogy e két tag éppen  $v_y = -(3/2)\omega x$  esetén ejti ki egymást, nem véletlen: ekkor lesz a kis test sebessége (az álló koordináta-rendszerben) az aktuális helyzetének megfelelő körpályához tartozó kerületi sebesség. Azokon a pályákon, ahol a kisodródás nem látszik, az  $y$  irányú sebesség éppen jó előjelű ahhoz, hogy kompenzálja a taszítást, vagy legalábbis annak egy részét.

Még egy dolog tűnik fel: a „felső” pályákon a kis test inkább hátra húz, míg az „alsókon” előre siet. Az álló koordináta-rendszerben ez annak felel meg, hogy az egyik esetben lassabban, a másik esetben gyorsabban fut a kis test a körpálya mentén. Ez természetes is: kisebb sugarú körpályához kisebb keringési idő, azaz nagyobb szögsebesség tartozik.

Mindezeket végiggondolva szinte meglepőnek tűnik, hogy van olyan eset, amikor (igaz, hogy csak közelítőleg) a Föld hatása és a körpályán való keringés elhanyagolható, és csak a kölcsönös vonzás érvényesül. Ez az az eset, amikor a kis testet a pálya mentén tesszük ki ( $x = 0$ ) és ugyanakkora sebességgel indítjuk, mint amekkora sebessége a nagy testnek van (1. sz. pálya). Ilyenkor is elgömbül azért a pálya: miközben a kis test az űrhajó felé gyorsul,  $v_y$  nő, ez  $x$  irányú gyorsulást „indukál”, megindul a kisodródás, de nincs idő eléggé kisodródni, a kis test eléri az űrhajót, és még időben sem sokkal később, mintha a két test egyenes vonalú pályán haladna.

Egy ilyen feladatot alaposan végiggondolva láthatjuk, hogy milyen bonyolult dolog, mekkora számítógépes munkát igényel egy több test gravitációs terében való mozgást kiszámítani, pl. egy űrhajót egy másik bolygóra eljuttatni, vagy akár egy űrállomást megközelíteni. Értékelnünk kell azt, hogy néhány pályamódosítással elérhető egy szállító űrhajó és egy űrállomás összekapcsolása.