I. forduló

1. Melyek azok a kétjegyű számok, amelyeknek legtöbb osztója van?

2. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget:

$$x(x+1)(x+2)(x+3) \geq \frac{9}{16}.$$

3. Az $ABCDEF$ konvex hatszög szögei egyenlők. Bizonyítsa be, hogy

$$AB - DE = EF - BC = CD - FA.$$

4. Mely valós α értékek elégítik ki a következő kettős egyenlőtlenséget:

$$\frac{\text{tg } \alpha}{3} \leq \text{tg } 3\alpha \leq 3 \text{ tg } \alpha.$$

5. Mekkora szöget zárnak be a téglalap átlói az oldalakkal, ha a szögfelezői által határolt négyzet területe egyenlő a téglalap területével?

6. Legyen $f(x) = 1$, ha $x \geq 0$ és $f(x) = 0$, ha $x < 0$; továbbá $g(x) = f(x) - f(x-1)$.
a) Határozza meg $h(\sqrt{15})$ értékét, ha

$$h(x) = g(x-1) + 2 \cdot g(x-2) + 3 \cdot g(x-3) + \ldots + 1981 \cdot g(x-1981).$$

b)Az x mely értékeire igaz, hogy $h(x) = 13$?

7. Bizonyítsa be, hogy ha az A, B, C pontokra $AB^2 \geq AC^2 + BC^2$ teljesül és D az A, B, C síkjának tetszés szerinti pontja, akkor $CD^2 \leq AD^2 + BD^2$.
Igaz-e az állítás akkor is, ha D nincs az A, B és C síkjában?

8. A $p_1, p_2, p_3, \ldots$ sorozatot a következőképpen definiáljuk:

$$p_1 = 2 \quad \text{és} \quad p_n (n = 2, 3, \ldots) \quad \text{a} \quad p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{n-1} + 1$$

szám legnagyobb prímosztója. Bizonyítsuk be, hogy a sorozatban nem fordulhat elő az 5-ös szám!

II. forduló

A szakközépiskolák és a gimnáziumok általános tantervű
III-IV. osztályos tanulói részére

1. Adja meg az összes olyan n természetes számot, amelyre $2^8 + 2^{11} + 2^n$ egyenlő egy egész szám négyzetével!

2. Legyenek x és y olyan valós változók, amelyekre $0 < x < 1$ és $x + y = 1$. Állapítsa meg az

$$x \cdot \frac{1+x^2}{1+x} + y \cdot \frac{1+y^2}{1+y}$$

kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, továbbá azt is, hogy a kifejezés az x és y változók mely értékei esetén veszi fel a szélsőértékeit!

3. Háromoldalú csonka gúla alaplapjának területe A_1, fedőlapjának területe A_2 ($A_1 > A_2$), oldallapjai területének összege P.
Bizonyítsa be, hogy ha a csonka gúla úgy metszhető el az alaplapjával párhuzamos síkkal, hogy a kapott két kisebb csonka gúla mindegyikébe gömböt lehet írni, akkor fennáll a következő összefüggés:

$$P = \left(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2}\right) \cdot \left(\sqrt[4]{A_1} + \sqrt[4]{A_2}\right)^2.$$

(A háromoldalú csonkagúlába írt – vagy beírt – gömbön olyan gömböt értünk, amely érinti a csonka gúlának mind az öt lapját.)

A gimnáziumok matematika I. szakosított tantervű
III – IV. osztályos tanulói részére

1. Állítsuk párba a tetraéder lapsúlyvonalai közül azokat, amelyek ugyanabból az élfelezőpontból indulnak ki. Tegyük fel, hogy egy tetraéderben az egy párba tartozó lapsúlyvonalak egyenlők. Hány különböző lapsúlyvonal-hosszúság lehet?

2. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{ha} \quad x < 0; \\ f(x-1)+1, & \text{ha} \quad x \geq 0; \end{cases}$$

és

$$g(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & \text{ha} \quad x < \dfrac{1}{2}; \\ g(x-1)+1, & \text{ha} \quad x \geq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Oldjuk meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet!

3. Legyen $f(n)$ az n pozitív egész szám tízes számrendszerbeli alakjában a nullák száma! Mivel egyenlő az

$$S_n = \sum_{k-1}^{n} 2^{f(k)}$$

összeg, ha $n = 10^{10} - 1$?

A gimnáziumok matematika II. szakosított tantervű
III - IV. osztályos tanulói számára

1. Adott egy körön hat különböző pont. Kiválasztunk a pontok közül hármat; az ezek által meghatározott háromszög magasságpontját összekötjük a másik három pont által meghatározott háromszög súlypontjával.

Mutassuk meg, hogy az összes ilyen módon kapott egyenesnek van közös pontja!

2. Legyen n tetszőleges pozitív egész, és jelölje $f(n)$ azoknak a – különböző pozitív egészekből álló – számhármasoknak a számát, amelyekben az elemek összege n-nel egyenlő! Két számhármast azonosnak tekintünk, ha csak az elemek sorrendjében különböznek.

Adjuk meg az összes olyan n-et, amelyre $f(n)$ páros!

3. Adjunk meg olyan egész együtthatós $P(x)$ polinomot, amelyre teljesül, hogy a $[0{,}19;\ 0{,}81]$ intervallumban minden x-re

$$\left| P(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{1981}.$$