A 22. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai[1]

1. P belső pontja egy adott ABC háromszögnek. P-ből a BC, CA, illetve AB egyenesre bocsátott merőleges talppontja rendre D, E, illetve F. Határozzuk meg az összes olyan P pontot, amelyre a

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

összeg lehető legkisebb. (Anglia)

2. Legyen r olyan egész szám, melyre $1 \leq r \leq n$, és tekintsük az $\{1, 2, ..., n\}$ halmaz összes r elemű részhalmazát. Vegyük e részhalmazok mindegyikéből a legkisebb elemet, és végül jelölje $F(n, r)$ ezeknek az elemeknek a számtani közepét. Bizonyítsuk be, hogy

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}.$$

(NSZK)

3. Állapítsuk meg m^2+n^2 legnagyobb értékét, ha n és m olyan egész számokat jelölnek, melyekre, $1 \leq m,\ n \leq 1981$, és

$$(n^2 - mn - m^2)^2 = 1$$

(Hollandia)

4. (a) Keressük meg az összes olyan, 2-nél nagyobb n egész számot, melyre található n egymást követő pozitív egész szám úgy, hogy közülük a legnagyobb osztója a többi $(n-1)$ elem legkisebb közös többszörösének.

(b) Keressük meg az összes olyan, 2-nél nagyobb n egész számot, melyre pontosan egy fenti tulajdonságú számhalmaz létezik. (Belgium)

5. Három egyenlő sugarú kör egy adott háromszög belsejében úgy helyezkedik el, hogy érintik a háromszög két–két oldalegyenesét, továbbá mindhárom kör átmegy egy közös O ponton. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög beírt körének középpontja, körülírt körének középpontja és az O pont egy egyenesre esik. (Szovjetunió)

6. Az $f(x, y)$ függvény minden nem–negatív egész x és y esetén kielégíti az

$$f(0,\ y) = y+1; \quad f(x+1,\ 0) = f(x,\ 1); \quad f(x+1,\ y+1) = f(x,\ f(x+1,\ y))$$

feltételeket. Számítsuk ki $f(4,\ 1981)$ értékét. (Finnország)

[1] Mindegyik feladat helyes megoldása 7 pontot ért.