Ha ismerjük az a, b számok $S=a+b$ összegét és $P=ab$ szorzatát, magukat a számokat az

$$(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab=x^2-Sx+P$$

polinom gyökeiként állíthatjuk elő. Ha még azt is tudjuk, hogy $a\le b$, akkor

$$a=\frac{S}{2}-\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P},\quad b=\frac{S}{2}+\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}.$$

Ebből már a, b tetszőleges $f(a,b)$ függvénye meghatározható, és ha f szimmetrikus, vagyis tetszőleges a, b mellett $f(a,b)=f(b,a)$, akkor a kapott eredmény a $b<a$ esetben is használható. Ha azonban az S, P számokat nem ismerjük, csak algebrailag szeretnénk számolni velük, vagy ismerjük ugyan őket, de a, b fenti alakjában a négyzetgyök alatt nem teljes négyzet áll, ez a számolás meglehetősen nehézkes lehet. Például a két szám négyzetösszege a következő:

$$S_2=a^2+b^2=\left(\frac{S}{2}-\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}\right)^2+\left(\frac{S}{2}+\sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2-P}\right)^2=$$
$$=2\left(\frac{S}{2}\right)^2+2\left(\frac{S}{2}\right)^2-2P=S^2-2P.$$

Ha már tudjuk valahonnan ezt, helyességét könnyű ellenőrizni; de a végeredményt jobb volna egyszerűbb úton meghatározni. Olyan eljárásokat fogunk keresni, amelyekkel tetszőleges n természetes szám mellett az $S_n=a^n+b^n$ hatványösszeg csak $S=a+b$ és $P=ab$ hatványai, ezek szorzatai, és a szorzatok összegei, illetve különbségei alapján állítható elő.

Amíg az n kitevő kicsi, járható az az út, hogy vesszük $(a+b)$ n-edik hatványát, ebben máris megvan a^n+b^n, és ami felesleges, attól valahogy megszabadulunk:

$$S_3=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=S^3-3SP,$$
$$S_4=a^4+b^4=(a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2=S^4-4S^2P+2P^2,$$
$$S_5=a^5+b^5=(a+b)^5-5ab(a+b)^3+5a^2b^2(a+b)=S^5-5S^3P+5SP^2.$$

Messze azonban ezzel a módszerrel érezhetően nem fogunk jutni. Több reménnyel kecsegtet az az ötlet, hogy ha egymás után akarjuk az S_n-eket meghatározni, akkor menet közben használjuk fel a korábbi eredményeinket. Ha ugyanis S_n-et S-sel megszorozzuk, akkor S_{n+1} mellett csak S_{n-1} fog felbukkanni:

$$SS_n=(a+b)(a^n+b^n)=a^{n+1}+ab^n+ba^n+b^{n+1}=$$
$$=(a^{n+1}+b^{n+1})+ab(a^{n-1}+b^{n-1})=S_{n+1}+PS_{n-1}.$$

Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy

(1) $$S_{n+1}=SS_n-PS_{n-1}.$$

Kezdjük tehát az egészet elölről, talán most tovább jutunk:

$$S_0=a^0+b^0=2$$
$$S_1=a^1+b^1=S$$
$$S_2=a^2+b^2=S^2-2P$$
$$S_3=a^3+b^3=S^3-3SP$$
$$S_4=a^4+b^4=S^4-4S^2P+2P^2$$
$$S_5=a^5+b^5=S^5-5S^3P+5SP^2$$
$$S_6=a^6+b^6=S^6-6S^4P+9S^2P^2-2P^3$$
$$S_7=a^7+b^7=S^7-7S^5P+14S^3P^2-7SP^3$$
$$S_8=a^8+b^8=S^8-8S^6P+20S^4P^2-16S^2P^3+2P^4$$

1. Tétel. Tetszőleges n természetes számhoz találhatók olyan D_k^n együtthatók, hogy

(2) $$S_n=a^n+b^n=D_0^nS^n-D_1^nS^{n-2}P+D_2^nS^{n-4}P^2-\ldots+(-1)^kD_k^nS^{n-2k}P^k+\ldots+(-1)^mD_m^nS^{n-2m}P^m$$

igaz legyen tetszőleges a, b mellett, ahol $S=a+b$, $P=ab$, és m a legnagyobb egész, amelyre $2m\le n$, vagyis $m=\left[\frac{n}{2}\right]$.

Bizonyítás. Láttuk, hogy n kis értékeire igaz az állítás. Tegyük fel, hogy valamilyen n-ig már igazoltuk (2)-t. Akkor (1) alapján

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S\sum_{k=0}^{m}(-1)^k D_k^n S^{n-2k}P^k - P\sum_{k=0}^{m}(-1)^k D_k^{n-1}S^{n-2k-1}P^k = \\ &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k D_k^n S^{n+1-2k}P^k + \sum_{k=1}^{m+1}(-1)^k D_{k-1}^{n-1}S^{n+1-2k}P^k = \\ &= \sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k \left(D_k^n + D_{k-1}^{n-1}\right)S^{n+1-2k}P^k, \end{aligned}$$

ahol $D_k^n = 0$ minden olyan esetben, amikor $k > \dfrac{n}{2}$, valamint $k=0$ esetén D_{k-1}^{n-1} is legyen 0. Ez már (2)-t jelenti $(n+1)$-re, és ha n páratlan, készen is vagyunk, hiszen akkor $\left[\dfrac{n+1}{2}\right] = \left[\dfrac{n}{2}\right]+1$. Ha n páros, akkor $m = \left[\dfrac{n}{2}\right] > \dfrac{n-1}{2} > \dfrac{n}{2}-1$, tehát egyrészt $m > \dfrac{n-1}{2}$, így $D_m^{n-1} = 0$, másrészt $m+1 > \dfrac{n}{2}$, így $D_{m+1}^n = 0$, így a kapott összeg utolsó tagja elhagyható.

Az állításunkat ezzel beláttuk. Közben azt kaptuk, hogy

(3) $$D_k^{n+1} = D_k^n + D_{k-1}^{n-1}.$$

Ennek alapján még gyorsabban haladhatunk előre.

n	S^n	$-S^{n-2}P$	$+S^{n-4}P^2$	$-S^{n-6}P^3$	$+S^{n-8}P^4$	$-S^{n-10}P^5$	$S^{n-12}P^6$	$-S^{n-14}P^7$
0	2	–	–	–	–	–	–	–
1	1	–	–	–	–	–	–	–
2	1	2	–	–	–	–	–	–
3	1	3	–	–	–	–	–	–
4	1	4	2	–	–	–	–	–
5	1	5	5	–	–	–	–	–
6	1	6	9	2	–	–	–	–
7	1	7	14	7	–	–	–	–
8	1	8	20	16	2	–	–	–
9	1	9	27	30	9	–	–	–
10	1	10	35	50	25	2	–	–
11	1	11	44	77	55	11	–	–
12	1	12	54	112	105	36	2	–
13	1	13	65	156	182	91	13	–
14	1	14	77	210	294	196	49	2
15	1	15	90	275	450	378	140	13

Most már azzal is megpróbálkozhatunk, hogy k kis értékeire tetszőleges n mellett meghatározzuk a D_k^n együtthatókat:

$$\begin{aligned} &D_0^n = 1, \quad \text{ha} \quad n > 0 \\ &D_1^n = n, \quad \text{ha} \quad n \geq 2 \\ &D_2^n = \frac{n}{2}(n-3), \quad \text{ha} \quad n \geq 4 \\ &D_3^n = \frac{n}{6}(n-4)(n-5), \quad \text{ha} \quad n \geq 6 \\ &D_4^n = \frac{n}{24}(n-5)(n-6)(n-7), \quad \text{ha} \quad n \geq 8. \end{aligned}$$

Ezek alapján már sejthető, és ha már egyszer sejtjük, akkor (3) alapján könnyen igazolható is, hogy ha $k > 1$, akkor

$$D_k^n = \frac{n}{k!} \prod_{j=k+1}^{2k-1} (n-j) \quad \text{ha} \quad n \geq 2k. \tag{4}$$

Nem kell ugyanis mást tennünk, mint (4)-et (3)-ba helyettesíteni:

$$\frac{n+1}{k!} \prod_{j=k+1}^{2k-1} (n+1-j) = \frac{n}{k!} \prod_{j=k+1}^{2k-1} (n-j) + \frac{n-1}{(k-1)!} \prod_{j=k}^{2k-3} (n-j-1).$$

Osszunk itt $\frac{1}{k!} \prod_{j=k+1}^{2k-2} (n-j)$-vel:

$$(n+1)(n-k) = n(n-2k+1) + (n-1)k,$$

ami valóban igaz. Közben azonban elég sok munkára volt szükségünk, amiből valamit megtakaríthatunk, ha előbb hajlandók vagyunk egy kis kitérőt tenni. Tartsuk meg a (3) képzési szabályt de módosítsuk a kicsit kellemetlennek tűnő $D_0^0 = 2$ kezdő értéket $D_0^0 = 1$-re. Így kapjuk a következő táblázatot:

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	–	–	–	–	–	–	–
1	1	–	–	–	–	–	–	–
2	1	1	–	–	–	–	–	–
3	1	2	–	–	–	–	–	–
4	1	3	1	–	–	–	–	–
5	1	4	3	–	–	–	–	–
6	1	5	6	1	–	–	–	–
7	1	6	10	4	–	–	–	–
8	1	7	15	10	1	–	–	–
9	1	8	21	20	5	–	–	–
10	1	9	28	35	15	1	–	–
11	1	10	36	56	35	6	–	–
12	1	11	45	84	70	21	1	–
13	1	12	55	120	126	56	7	–
14	1	13	66	165	210	126	28	1
15	1	14	78	220	330	252	84	8

Kissé váratlan fekvésben ugyan, de elénk került az ún. Pascal háromszög:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\end{array}$$

. . . .

Ha ennek n-edik sorában a k-adik elemet szokás szerint C_n^k-nel jelöljük, akkor a módosított táblázatunk n-edik sorának k-adik eleme C_{n-k}^k. Számoljuk most ki az eredeti és a módosított táblázat különbségét!

Nem dolgoztunk hiába, ha eltolva is, de visszakaptuk a módosított táblázatot. Ez azt jelenti, hogy

(5) $$D_k^n = C_{n-k}^k + C_{n-k-1}^{k-1}.$$

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	–	–	–	–	–	–	–
1	0	–	–	–	–	–	–	–
2	0	1	–	–	–	–	–	–
3	0	1	–	–	–	–	–	–
4	0	1	1	–	–	–	–	–
5	0	1	2	–	–	–	–	–
6	0	1	3	1	–	–	–	–
7	0	1	4	3	–	–	–	–
8	0	1	5	6	1	–	–	–
9	0	1	6	10	4	–	–	–
10	0	1	7	15	10	1	–	–
11	0	1	8	21	20	5	–	–
12	0	1	9	28	35	15	1	–
13	0	1	10	36	56	35	6	–
14	0	1	11	45	84	70	21	1
15	0	1	12	55	120	126	56	7

Nincs tehát szükség arra, hogy „megsejtsük” D_k^n alakját, ha ismerjük a Pascal háromszög általános tagját, vagyis tudjuk, hogy

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j}.$$

Ennek alapján ugyanis

(6) $$D_k^n = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} = \binom{n-k-1}{k-1}\left(\frac{n-k}{k}+1\right) = \\ = \frac{n}{k}\binom{n-k-1}{k-1} = \frac{n}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}(n-k-j),$$

ami megegyezik (4)-gyel. Így tehát kétféleképpen is beláttuk a következő tételt.

2. Tétel. Tetszőleges n természetes szám mellett igaz, hogy

(7) $$a^n + b^n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\right](a+b)^{n-2k} \cdot (-ab)^k.$$

Megmutatjuk, hogyan általánosítható az együtthatók előállításában használt (1) összefüggés. Az eddigi eredményeinket átalakítva, és a D_k^n jelölést továbbra is megtartva azt kapjuk, hogy

$$\frac{S_n}{S^n} = \frac{a^n+b^n}{(a+b)^n} = \sum_{k=0}^{m} D_k^n \left(\frac{-ab}{(a+b)^2}\right)^k = Q_n\left(-\frac{ab}{(a+b)^2}\right),$$

ahol $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{m} D_k^n x^k$, és $m = \left[\frac{n}{2}\right]$. Mivel tetszőleges $m \le n$ mellett

$$\frac{S_n}{S^n} \cdot \frac{S_m}{S^m} = \frac{a^n+b^n}{(a+b)^n} \cdot \frac{a^m+b^m}{(a+b)^m} = \frac{a^{n+m}+b^{n+m}}{(a+b)^{n+m}} + \frac{(ab)^m}{(a+b)^{2m}} \cdot \frac{a^{n-m}+b^{n-m}}{(a+b)^{n-m}},$$

a Q_n polinomokra tetszőleges $0 \le m \le n$ mellett teljesül, hogy

$$Q_n(x)Q_m(x) = Q_{n+m}(x) + (-x)^m Q_{n-m}(x).$$

Például

$$\begin{aligned} Q_7(x)Q_6(x) &= (1+7x+14x^2+7x^3)(1+6x+9x^2+2x^3) = \\ &= (1+13x+65x^2+156x^3+182x^4+91x^5+13x^6)+x^6 = \\ &= Q_{13}(x)+x^6Q_1(x). \end{aligned}$$

Végül felsorolok néhány feladatot a D_k^n együtthatókkal kapcsolatban.

1. Határozzuk meg a binomiális tétel segítségével a $\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{n}{j}D^{n-2j}$ összeg értékét.

2. Határozzuk meg a $\sum_{k=0}^{m} D_k^n$ összeg értékét, ahol $m = \left[\frac{n}{2}\right]$.

3. Határozzuk meg a $\sum_{k=0}^{m} D_k^n 2^k$ összeg értékét, ahol $m = \left[\frac{n}{2}\right]$.

4. Döntsük el, hogy osztható-e tetszőleges n és k mellett D_k^n az $n/(n,\, k)$ hányadossal, ahol $(n,\, k)$ az n és k számok legnagyobb közös osztóját jelöli.