A megoldáshoz felhasználjuk *Surányi János* Polinomok és végtelen polinomok c. cikkét (K. M. L. 45. kötet, 109–117., valamint 193-203. oldalak). Legyen a sorozat képezési szabálya

$$u_{n+3} = \alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n \tag{2}$$

valamint legyen adva a sorozat első három, u_0, u_1, u_2 tagja. A cikkben leírt módszerhez hasonlóan tekintsük a következő végtelen polinomot:

$$U = u_0 + u_1 x - u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots \tag{3}$$

A (2) rekurzív összefüggést szorozzuk meg x^{n+3}-nal és $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$-re adjuk össze:

$$\begin{aligned} u_3 x^3 + u_4 x^4 + \ldots = \alpha x(u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots) + \beta x^2 (u_1 x + u_2 x^2 + \ldots) + \\ + \gamma x^3 (u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots), \end{aligned}$$

azaz (3)-at figyelembe véve kapjuk, hogy

$$U - (u_0 + u_1 x + u_2 x^2) = \alpha x\big[U - (u_0 + u_1 x)\big] + \beta x^2 (U - u_0) + \gamma x^3 U,$$

ahonnan

$$U(1 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3) = (u_0 + u_1 x + u_2 x^2) - \alpha x(u_0 + u_1 x) - \beta x^2 u_0,$$

vagyis

$$U = \frac{u_0 + (u_1 - \alpha u_0)x + (u_2 - \alpha u_1 - \beta u_0)x^2}{1 - \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3}. \tag{4}$$

Ezt a két összefüggést alkalmazzuk a feladatban szereplő sorozatokra. Az a) esetben $\alpha = 1$, $\beta = 1$ és $\gamma = 1$, így

$$\begin{aligned} U = \frac{0 + (1-0)x + (2-1-0)x^2}{1 - x - x^2 + x^3} = \frac{x + x^2}{1 - x - x^2 + x^3} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^2(1+x)} = \\ = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

A cikkben láttuk, hogy

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots,$$

így tehát U ennek x-szerese:

$$U = 0 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$$

vagyis (3) szerint $u_n = n$.

A b) esetben $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$, $v_0 = v_1 = v_2 = 1$, így

$$U = \frac{1 + (1-1)x + (1-1+1)x^2}{1 - x + x^2 - x^3} = \frac{1 + x^2}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{1}{1-x}.$$

Szintén a cikkben láttuk, hogy

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots, \tag{5}$$

azaz ebben az esetben $v_n = 1$, minden n-re.

Végül a c) esetben $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, így

$$U = \frac{1 + (1-1)x + (2-1)x^2}{1 - x - x^3\ |} = \frac{1 + x^2}{1 - (x + x^3)}.$$

(5) segítségével először az $1/(1 - x - x^3)$-t alakítjuk végtelen polinommá úgy, hogy (5)-ben x helyébe $(x + x^3)$-t írunk:

$$\frac{1}{1 - (x + x^3)} = 1 + (x + x^3) + (x + x^3)^2 + \ldots + (x + x^3)^n + \ldots \tag{6}$$

Nézzük meg, hogy x^n-es tagot miképpen kapunk. Az $(x + x^3)^k = x^k(1 + x^2)^k$ kifejtésében csupa k-val egyező párosságú kitevőt találunk, mégpedig az x^{k+2t} tagot a $\binom{k}{i}$ együtthatóval. Így az $(x + x^3)^n$-ben az x^n hatvány $1 = \binom{n}{0}$ együtthatóval, az $(x + x^3)^{n-2}$ tagban $\binom{n-2}{1}$ együtthatóval szerepel, így x^n együtthatója

$$\binom{n}{0} + \binom{n-2}{1} + \ldots + \binom{n-2i}{1} + \ldots \tag{7}$$

Ha a (6) végtelen polinomot megszorozzuk $(1+x^2)$-tel, akkor az így kapott polinomban x^n együtthatója megegyezik a (6) polinomban x^n és x^{n-2} együtthatójának összegével, azaz (7) szerint (mindjárt átrendezve)

$$\binom{n}{0}+\left[\binom{n-2}{0}+\binom{n-2}{1}\right]+\left[\binom{n-4}{1}+\binom{n-4}{2}\right]+\ldots+\left[\binom{n-2i}{i-1}+\binom{n-2i}{i}\right]+\ldots=$$
$$=\binom{n+1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-3}{2}+\ldots+\binom{n+1-2i}{i}+\ldots$$

Mivel így éppen a megfelelő U polinom együtthatóit kaptuk, azért

(8) $$w_n=\binom{n+1}{0}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{n+1-2i}{i}+\ldots$$

Megjegyzések. 1. A (8) alatt kapott összeg nyilván véges, hiszen ha $n+1-2i<i$, akkor a binomiális együttható értéke 0, és ha egy binomiális együttható értéke 0, akkor az összes utána következő értéke is 0 lesz. Az utolsó nem-nulla binomiális együttható éppen

$$\binom{n-2\left[\frac{n+1}{3}\right]+1}{\left[\frac{n+1}{3}\right]}$$

2. A feladat a), illetve b) részét a kezdő tagok és a rekurzió egyszerűsége miatt könnyebben is meg lehet oldani, de itt a célunk a cikkben szereplő módszer alkalmazása volt. Természetesen más (pl. teljes indukcióval való) megoldást is elfogadtunk.