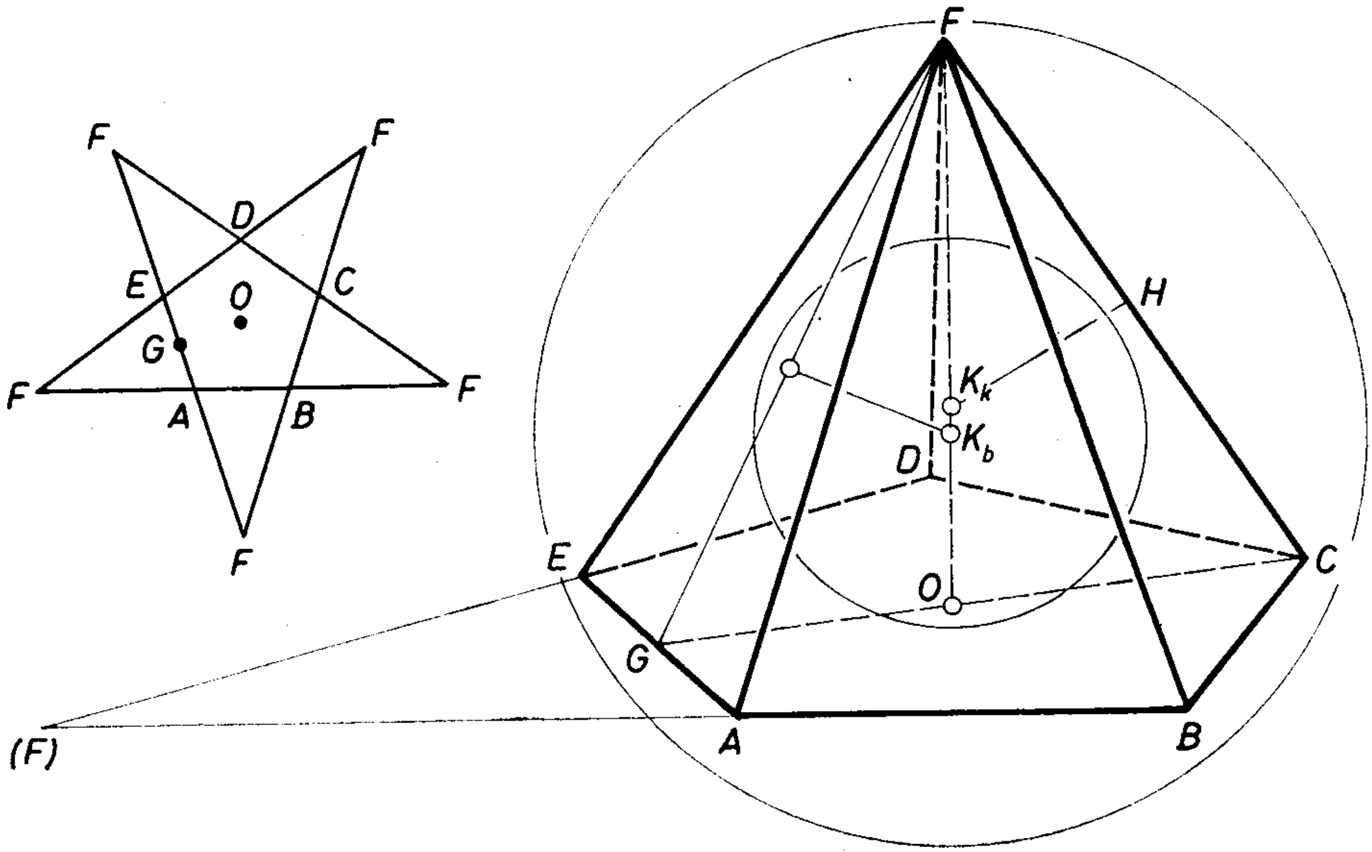
I. megoldás. Jelöljük az alaplap (szabályos ötszög) csúcsait rendre A, B, C, D, E-vel, a gúla hatodik csúcsát F fel. Mivel az oldallapok leforgatásával szabályos csillagötszög keletkezik, azért F-nek az AE él körüli leforgatott helyzete az AB és ED oldalegyenesek metszéspontjába esik (1. ábra).



1. ábra

E szerint az oldallapok olyan egyenlő szárú háromszögek, amelyekben az alapon levő szög 72°, és az oldalélek hossza

$$AF = \frac{AE/2}{\cos FAE\sphericalangle} = \frac{1}{2\cos 72^\circ} = \frac{1}{2\sin 18^\circ} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}(= 1,618 \ \text{ egység}).$$

Jelöljük az alaplap középpontját O-val – ez a magasság talppontja –, az AE él felezőpontját G-vel. A gúla előírt szabályosságából következik, hogy mindkét gömb középpontja az FO magasságvonalon (forgási szimmetriatengelyen) lesz, továbbá a beírt gömb az alaplapot O-ban érinti, az AEF lapot pedig a GF oldalmagasság egy pontjában.

Legyen még a beírt gömb középpontja K_b, és sugara ϱ, így KG_b felezi az $FGO\sphericalangle = \gamma$ szöget, és

$$\varrho = OK_b = GO \ \text{tg}\frac{\gamma}{2} = GO\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}}.$$

Itt ismert goniometriai összefüggések alapján, valamint felhasználva 18°-nak és többszöröseinek a szabályos ötszögből kiszámítható szögfüggvényeit, egyrészt

$$GO = AG \ \text{tg } 54^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}},$$

másrészt $\cos\gamma = GO/GF$, így a gyökjel alatti kifejezés:

$$\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma} = \frac{GF-GO}{GF+GO} = \frac{GA(\ \text{tg } 72^\circ - \text{tg } 54^\circ)}{GA(\ \text{tg } 72^\circ + \text{tg } 54^\circ)} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin\ 3\cdot 18^\circ} = \frac{1}{3-4\ \sin^2 18^\circ}$$
$$= \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ezekkel

$$\varrho = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{40}} \ (= 0,4253 \text{ egység}).$$

A körülírt gömb R sugarának számításához a COF háromszöget használjuk. Jelöljük a gömb középpontját K_k-val, FC felezőpontját H-val. Az FK_kH és FCO derékszögű háromszögek hasonlóságából

$$\frac{FH}{R}=\frac{FO}{FC}, \qquad R=\frac{FC^2}{2\cdot FO}=\frac{FC^2}{2\sqrt{FC^2-OC^2}}.$$

Itt

$$OC=OA=\frac{AG}{\cos 54^\circ}=\frac{1}{2\sin 36^\circ}=\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt5}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt5}{10}}.$$

A nevezőbeli négyzetgyökjel alatt

$$FC^2-OC^2=\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^2-\frac{5+\sqrt5}{10}=\frac{1}{5-2\sqrt5}$$

áll, végeredményben tehát

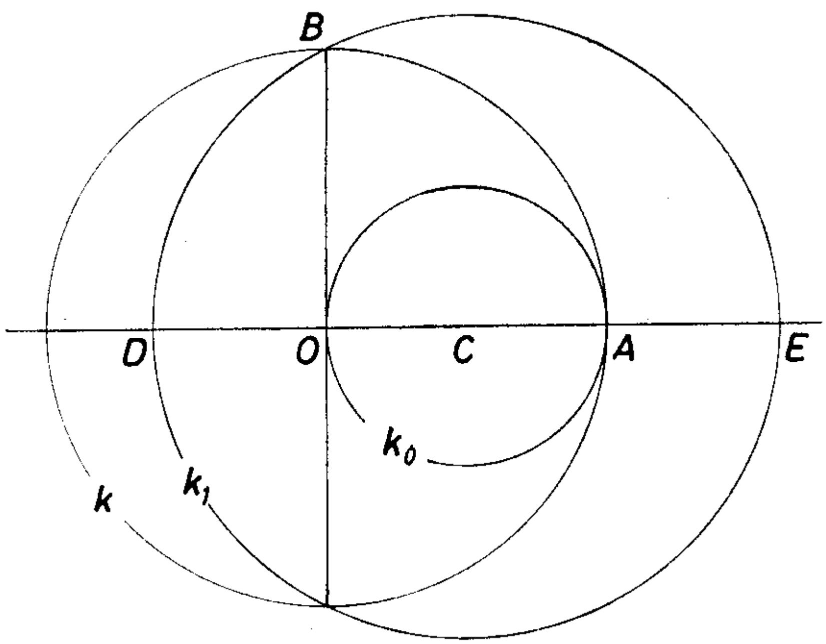
$$R=\frac14\sqrt{10+2\sqrt5}\ \ (=0,9511 \text{ egység}).$$

Megjegyzés. Két észrevételt teszünk számításaink alapján. Egyrészt $R/\varrho=\sqrt5$, másrészt

$$FO=\frac{FC^2}{2R}=\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt5}}=R+\varrho,$$

tehát K_b és K_k egybeesik.

II. megoldás (vázlat). Induljunk ki a szabályos ötszög eukleidészi szerkesztéséből (2. ábra).



2. ábra

Legyenek OA és OB a k kör merőleges sugarai, C az OA szakasz felezőpontja, és jelöljük a C középpontú, A-n, illetve B-n átmenő köröket k_0-lal, illetve k_1-gyel, k_1-nek az OA egyenesen levő pontjait D-vel, E-vel (D legyen közülük O-hoz közelebb). Az EBD derékszögű háromszögben BO a DO, $OE=OA+AE=OB+DO$ szakaszok mértani közepe, emiatt

$$DO:OB=OB:(OB+DO),$$

vagyis DO és OB aránya megegyezik a szabályos tízszög oldalainak és a köré írt kör sugarának az arányával. Így DO valóban a k-ba írt szabályos tízszög oldala, és

$$BE^2=DE\cdot OE$$

miatt BE a k-ba írt szabályos ötszög átlója, végül $DB:BE=DO:OB$ miatt DB a k-ba írt szabályos ötszög oldala.

Forgassuk meg ezt az ábrát a DE egyenes körül, és jelöljük a k_0, k_1 körök forgatásából keletkező gömböket G_0 lal, G_1-gyel. G_1-ből a BO forgatásából származó sík k-val egybevágó kört metsz ki, tehát az ebbe írt szabályos ötszög oldalai BD-vel egyenlőek, átlói pedig BE-vel. így ez az ötszög E-vel együtt épp a feladatban szereplő gúlát határozza meg, ha BD egységnyi.

A kapott gúlának G_1 természetesen a köré írt gömbje, megmutatjuk, hogy G_0 a beírt gömb. A konstrukció miatt G_0 érinti az alaplapot, melyben például a B csúcsból induló átlók az oldallapokkal egybevágó háromszögeket zárnak közre. Mivel $BC = EC$, a G_0-hoz E-ből húzott érintősíkok is k-val egybevágó köröket metszenek ki G_1-ből, tehát a gúla oldallapjai valóban érintik G_0-t.

Ha $OC = \varrho$, akkor $BC = \varrho\sqrt{5}$, $DO = \varrho(\sqrt{5}-1)$, $DB^2 = \varrho^2(10 - 2\sqrt{5})$. Ha tehát $DB = 1$, akkor

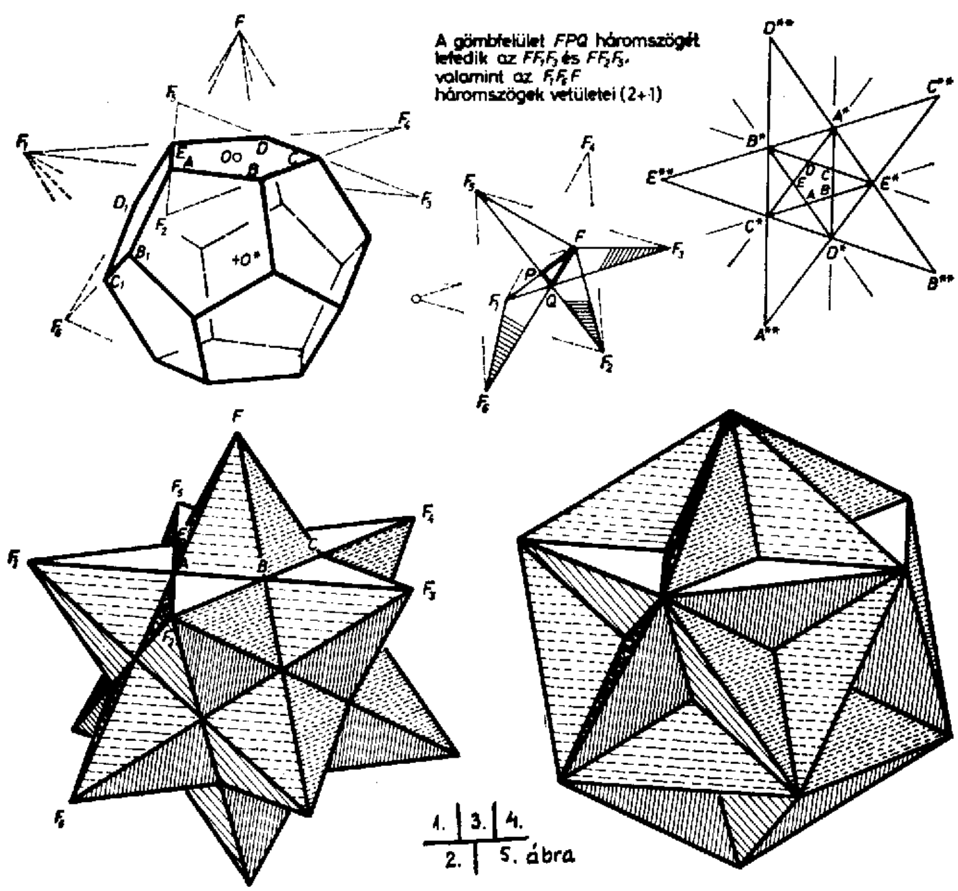
$$\varrho^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{40}.$$

Így a gúlába írt gömb sugara $\varrho = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{40}}$ és a gúla köré írt gömb sugara $BC = \varrho\sqrt{5} = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

MEGJEGYZÉSEK

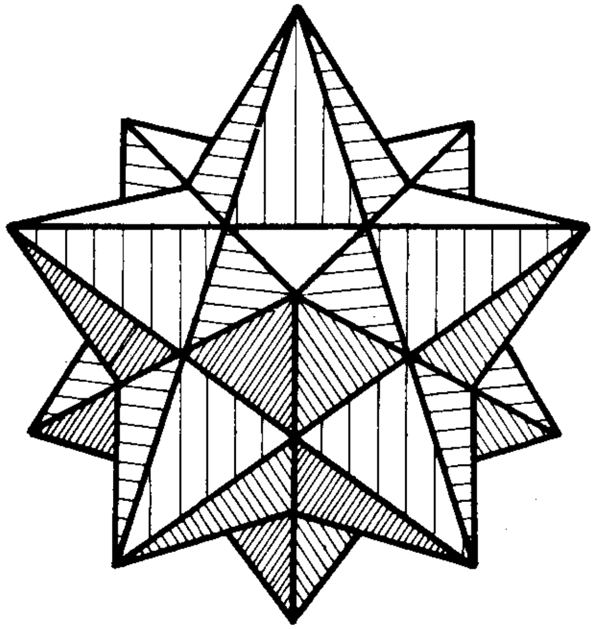
1. Az I. megoldás számításaira támaszkodva kapcsolatot írunk le gúlánk, a szabályos dodekaéder, valamint az utóbbinak magasabb fajú rokonai között.

Az FO és GO szakaszok kifejezései alapján a gúla alapéleinél keletkező lapszögekre tg $FGO\sphericalangle = 2$, cos $FGO\sphericalangle = 1/\sqrt{5}$. Ez azt jelenti – mint alább megmutatjuk –, hogy az oldallapok által a kiterítés közben „súrolt” $FG(F)$ nagyságú lapszögek egyenlők a szabályosan dodekaéder szomszédos lapjai közti szögekkel (lásd a megoldás 1. ábráját). Ha tehát az egységnyi élű dodekaéder lapjaira 1–1 példányt illesztünk a vizsgált gúlából – természetesen az alapötszögüknél fogva –, akkor az $ABCDE = L$ dodekaéderlapra állított gúla EAF oldallapja olybá vehető, mintha a szomszédos $AED_1C_1B_1 = L_1$ dodekaéderlapra állított gúla EAF_1 oldallapjának lenne a kiterítése az L_1 alapsíkba (az 1-es index az AEO^* síkra való tükörképet jelöli, ahol O^* a dodekaéder középpontja). Ugyanez áll a 12 gúla együttvéve 60 oldallapjára (1 . és 2. ábra a borító hátoldalán).



1. | 3. | 4.
2. | 5. ábra

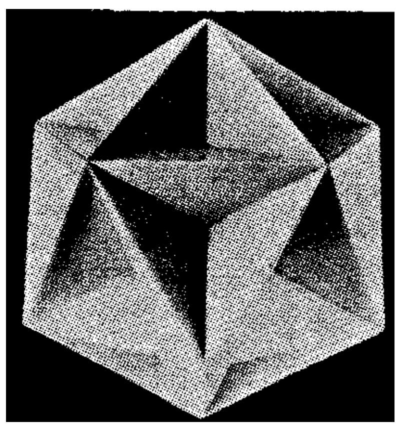
Azt is mondhatjuk tehát – a gúlákat mellőzve – , hogy amit látunk, az a dodekaéder lapjaiból kiterjesztéssel keletkezett 12 csillagötszöglap együttese (2. ábra, egyező csíkozás-színezés az egy-egy csillaglapot alkotó 5–5 részen).



És ezzel előttünk áll egyike a 4, ún. Poinsot-féle (olvasd: poenzo) magasabb fajú szabályos poliédernek. A lapok 5-ösével új csúcsot alkotnak, 2-esével élben metszik egymást (gúlacsúcstól gúlacsúcsig, az eredeti dodekaéder csúcsai már nem számítanak csúcsnak). Az új 12 csúcs „kis környezetei" konvex testszögletek.

Ezt a problémakört *L. Poinsot* (1777-1859) francia matematikus-fizikusnak egy, a szabályos csillagsokszögekről kimondott, algebrai jellegű állítására támaszkodva *A. Cauchy* dolgozta ki először. A csillagötszöglapokat *másodfajú*nak mondják, és ezen azt értik, hogy mialatt egy mozgó pont a megoldás 1. ábrájának bal felső F-jéből G-n át az alsó F-be megy, majd C-n át a jobb felsőbe, E-n át a bal alsóba, B-n át a jobb alsóba, végül D-n át visszatér, eközben a körülírt körön O-ból való vetítéssel előálló „vetülete" *kétszer* járja körül a kört. Másképpen: a csillagötszög oldalainak O-ból való vetületei kétszeresen fedik le a kört.

Hasonlóan, ha vetítjük az új poliéder 12 db csillagötszög lapját O^*-ból egy, az O^* körüli gömbfelületre, a vetületek 3-szorosan fedik le a gömböt. Erre utal új poliéderünk másik jelzője: *harmadfajú* (a borító 3. ábrája).

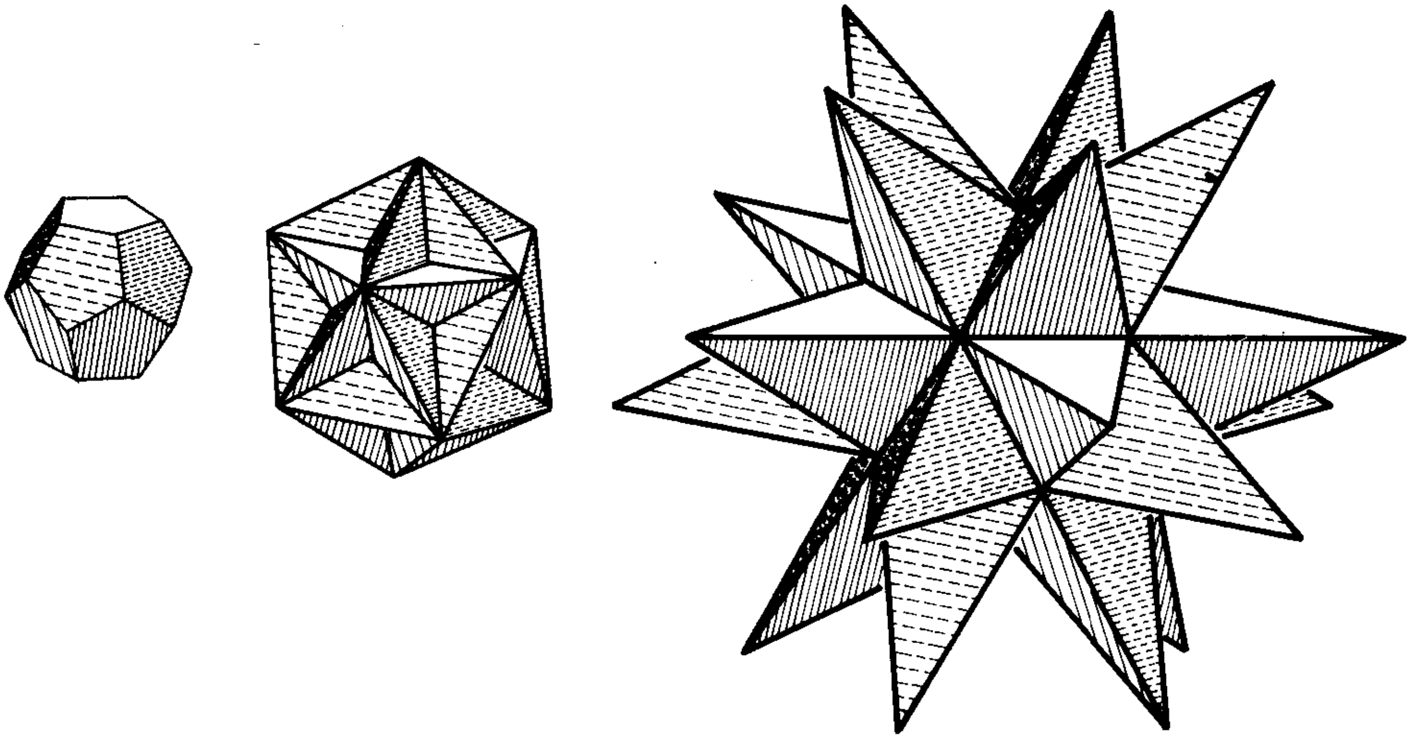


Szemléletesen azt mondjuk, hogy a *harmadfajú, csillaglapú, konvexcsúcsú szabályos dodekaéder* 12 csúcsának konvex burka szabályos ikozaéder.

2. További kettőt kapunk meg a Poinsot-poliéderek együtteséből a 4. ábra kiterjesztési terve szerint. Ez annak a 10 metszésvonalnak az együttese, amelyekben a közönséges szabályos dodekaéder egy lapjának síkját a többi lapsíkok metszik (1 lap nem metszi, hiszen a 12 lap páronként párhuzamos). Tekintsük a belső kis konvex ötszöget felső lapnak, ennek oldalegyeneseit a vele szomszédos – a „felső kis kosarat" alkotó – lapok síkjai metszik ki, a nagyobbik csillagötszög oldalegyeneseit pedig az alsó kosár 5 lapjának síkjai.

Az első újabb poliédert úgy kapjuk, hogy az $ABCDE$ lapot az $A^*B^*C^*D^*E^*$ konvex ötszög kerületéig terjesz tjük ki (az első kiterjesztés az $A^*C^*E^*B^*D^*$ csillagötszögre történt), és ugyanezt végezzük a dodekaéder mindegyik lapján (5. ábra). A lapok most (ismét) elsőfajúak, a csúcsok a legutóbbiak, de a „kis környezetük" nem konvex, hanem csillag alapú testszöglet. Új élek jelentek meg, az eddigiek pedig eltűntek, pl. az A^*C^* egyenes most nem él, mert nem határvonala lapnak. (Ahogyan a síkban pl. A nem csúcs, amikor B^*D^*-ot tekintjük élnek.) Ez a poliéder a *harmadfajú, konvex lapú, csillagcsúcsú szabályos dodekaéder.*

Szemléletesen: a konvex burok még mindig az előbbi ikozaéder, de már nemcsak a csúcsait örökölte az új poliéder, hanem az éleit is; a lapjai helyén viszont kis gúlaszerű gödrök, völgyek alakultak ki az újabb lapkiterjesztésekből (6. ábra).



6. ábra

Végül az L lap (és minden lap) lehető legnagyobb kiterjesztésével az $A^{**}C^{**}E^{**}B^{**}D^{**}(A^{**})$ csillagötszöglaphoz jutunk, ennek éleihez az alsó kosár lapjainak ugyanígy kiterjesztett lapjai csatlakoznak (6. ábra). A $12 \cdot 5 = 60$ ék alakú kiterjesztési részháromszög 3-asával 20 új csúcsot alkot, és mintegy 3-oldalú gúlákkal fedik be az előbb említett völgyeket. Az élek ismét újak. Ez a poliéder a 7-*edfajú, csillaglapú, konvex csúcsú szabályos dodekaéder*. Konvex burka szabályos dodekaéder.

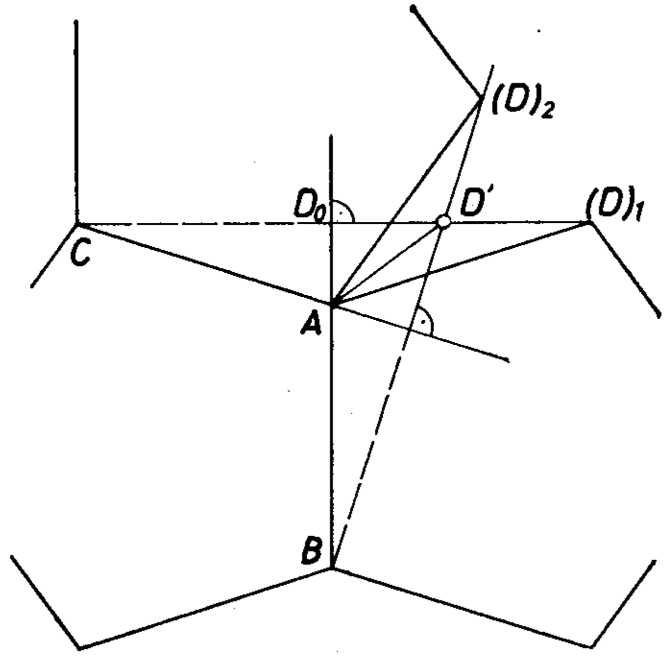
A 4-féle szabályos dodekaéder jellemzői

	A lapok			A csúcsok			A poliéder faja
	alakja	faja	száma	alakja	összefutó élek száma	faja	
Közönséges dodekaéder	konvex	1	20	konvex	3	1	1
1. kiterjesztés	csillag	2	12	konvex	5	1	3
2. kiterjesztés	konvex	1	12	csillag	5	2	3
3. kiterjesztés	csillag	2	20	konvex	3	1	7

A fentiekben csupán szemléletesen írtuk le ezt a 3 poliédert, a család negyedik tagjával nem is foglalkoztunk, mert az a közönséges ikozaéderből fejlődik ki. Persze azt sem bizonyítják a fentiek, hogy más ilyen poliéder nem létezik.

3. A dodekaéderlapok közti szöget a Gy. 1757-ben is használt szerkesztő eljárásra[1] támaszkodva számítjuk ki (7. ábra).

[1]K. M. L. 57 (1978) 140. o.



7. ábra

Az A csúcsba összefutó 3 lap által alkotott testszöglet AD élét felvágjuk és a DAB, DAC lapot az AB, ill. AC él körül beleforgatjuk az ABC lap síkjába. Ott az élek közti szögek valódi nagyságban látszanak. Majd ismét felhajtjuk a lapokat és a vetületükben kísérjük az újra egyesülő D pontok útját.

Legyen $(D)_1$ vetülete AB-re D_0, így D a $(D)_1D_0$ egyenes fölött fordul vissza, hasonlóan a másik a $(D)_2$-n átmenő, AC-re merőleges egyenes fölött, és e kettő metszése adja meg D-nek D' vetületét. Az AD' szakasz felezi az $A(D)_1$ és $A(D)_2$ közti szöget, így $D'AD_0\sphericalangle = 54°$, másrészt $(D)_1AD_0\sphericalangle = 72°$, ennélfogva $\cos DD_0D'\sphericalangle = D'D_0/DD_0 = \operatorname{tg} 54°/\operatorname{tg} 72° = 1/\sqrt{5}$, amint állítottuk.