a) Sorozatunk korlátos, egy felső korlátja 2, egy alsó korlátja 0.

Az alsó korlát nyilvánvaló. Másrészt $a_0 < 2$

$a_1 = (\sqrt{2})^{a_0} = \sqrt{2} < 2$, ennélfogva

$a_2 = (\sqrt{2})^{a_1} < (\sqrt{2})^2 = 2$,

mert az alapra $\sqrt{2} > 1$, és az 1-nél nagyobb alapú exponenciális függvények monoton növekedők. És hasonlóan, ha valamely k indexre $a_k < 2$, akkor ez a nagyságviszony öröklődik a következő elemre:

$$a_{k+1} = (\sqrt{2})^{a_k} < (\sqrt{2})^2 = 2,$$

ezzel bebizonyítottuk állításunkat.

b) Könnyű belátni, hogy az a_n sorozat szigorúan monoton növekedő. $n = 1$ mellett $a_1 = \sqrt{2} > 1 = a_0$. Ha pedig valamely $k(\geq 1)$ indexre fennáll $a_k > a_{k-1}$, akkor az említett monotonság alapján

$$a_{k+1} - a_k = (\sqrt{2})^{a_k} - (\sqrt{2})^{a_{k-1}} > (\sqrt{2})^{a_{k-1}} - (\sqrt{2})^{a_{k-1}} = 0.$$

E két megállapításunk alapján alkalmazhatjuk a következő tételt: fölülről korlátos, szigorúan monoton növekvő sorozat konvergens. Eszerint az a_n sorozat konvergens, a feladat megoldását befejeztük.

Megjegyzések. 1. A felhasznált tétel így folytatható: ... és határértéke egyenlő a felső korlátainak legkisebbikével (más néven: a sorozat F felső határával). Ezt bizonyítjuk. Választva egy tetszőleges ε pozitív számot, meg kell hozzá adnunk egy olyan N küszöbszámot, hogy minden olyan n-re, amelyre teljesül $n > N$, teljesüljön $|a_n - F| < \varepsilon$ is, azaz $F \geq a_n$ alapján $F - a_n < \varepsilon$.

Nem lehetséges, hogy ne legyen ilyen N. Ha ugyanis minden n-re $F - a_n \geq \varepsilon$ volna, akkor minden n-re $a_n \leq F - \varepsilon$ azaz $F - \varepsilon(< F)$ is felső korlátja volna a sorozatnak, holott F a legkisebb felső korlátja. Ha pedig valamely r indexre $F - a_r < \varepsilon$, akkor minden $n > r$ indexre $a_r < a_n \leq F$, tehát $F - a_n < F - a_r < \varepsilon$.

2. Mivel sorozatunknak nincs legnagyobb eleme, fölvetődhet az olvasóban a kérdés az előbbi F-fel kapcsolatban: hátha hasonlóan nincs legkisebb az a_n sorozat felső korlátai közt. Állítjuk, hogy bármely fölülről korlátos (végtelen számhalmaz felső korlátai közt *van* legkisebb – ez a mondott felső határ –, bizonyítására azonban itt nem terjeszkedünk ki; az ún. felsőbb matematikában ez alapvető tétel.

3. Kézenfekvő az a sejtés, hogy sorozatunkra $F = 2$, azaz $\lim_{n \to \infty} a_n = 2$. A bizonyítás azonban itt is messze vezetne.

4. A kitűzésben tévesen $a_1 = 1$ szerepelt, így a_0 nem volt definiálva. Helyesen jegyezte meg két versenyző, hogy ez az elírás sem a korlátosságot nem zavarja, sem a konvergenciát. Ha netán $a_0 > 2$, akkor a_0 felső korlát.