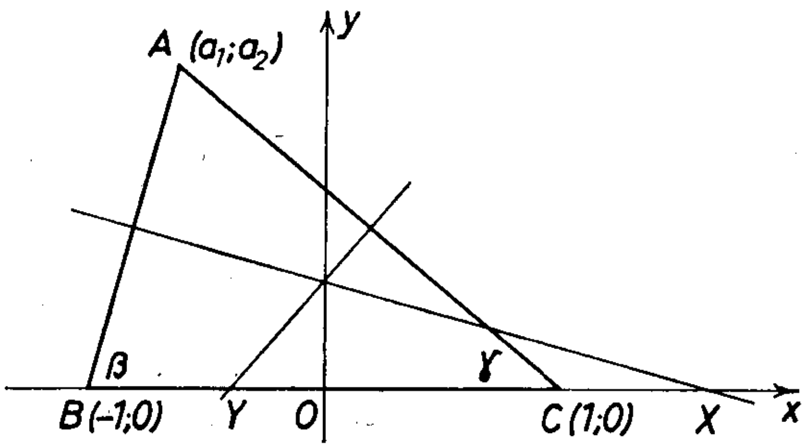
1. *Jelöljük egy tetszőleges ABC háromszög szögeit rendre α-val, β-val, illetve γ-val. Az AB oldal felező merőlegese messe a BC oldalt vagy annak meghosszabbítását az X pontban, az AC oldal felező merőlegese pedig ugyanezt az Y pontban. Bizonyítsuk be, hogy $BC = XY$ teljesülésének elegendő feltétele: $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = 3$. Mutassuk meg, hogy ez a feltétel nem szükséges, és adjuk meg $BC = XY$ teljesülésének elegendő feltételét.*

Megoldás. Helyezzük el az ABC háromszöget a koordináta-rendszerben úgy, hogy a csúcsok koordinátái $A(a_1;\, a_2)$, $B(-1;\, 0)$, $C(1;\, 0)$ legyenek. Az a célunk, hogy az XY szakasz hosszát $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma$ segítségével fejezzük ki.

Mivel az AB egyenes iránytangense, $\operatorname{tg}\beta = a_2/(1+a_1)$ és az AC egyenesé $\operatorname{tg}(180^\circ - \gamma) = -\operatorname{tg}\gamma = a_2/(a_1-1)$ és így $\operatorname{tg}\gamma = a_2/(1-a_1)$ azért

$$\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = \frac{a_2^2}{1-a_1^2}. \tag{1}$$

AB felező merőlegesének egyenlete: $(a_1+1)x + a_2 y = \dfrac{a_1^2+a_2^2-1}{2}$, az AC felező merőlegeseé pedig: $(a_1-1)x + a_2 y = \dfrac{a_1^2+a_2^2-1}{2}$.



1. ábra

Ezekbe $y = 0$-t helyettesítve, majd rendezve megkapjuk a felező merőlegesek és az x tengely (azaz a BC egyenes) metszéspontjainak az abszcisszáit. A metszéspontok koordinátái:

$$X\left(\frac{a_1^2+a_2^2-1}{2(a_1+1)};\ 0\right), \qquad Y\left(\frac{a_1^2+a_2^2-1}{2(a_1-1)};\ 0\right).$$

Ebből az XY szakasz hossza (figyelembe véve, hogy a két abszcissza különbsége negatív is lehet):

$$XY = \left|\frac{a_1^2+a_2^2-1}{2}\left(\frac{1}{a_1+1} - \frac{1}{a_1-1}\right)\right| = \left|\frac{a_1^2+a_2^2-1}{1-a_1^2}\right| = \left|-1 + \frac{a_2^2}{1-a_1^2}\right|.$$

Az (1) alatti érték helyettesítésével,

$$XY = |-1 + \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma|.$$

Mivel a koordináta-rendszer választása miatt $BC = 2$, az $XY = BC$, akkor és csakis akkor teljesül, ha $-1+\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = \pm 2$, azaz vagy $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = 3$, vagy pedig $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = -1$; a megoldás menete éppen azt mutatja, hogy mindkét kapott feltétel elégséges $XY = BC$ teljesüléséhez és a kettő közül az egyik teljesülése szükséges is.

Megjegyzés. A sokféle megoldási lehetőség közül az analitikus geometriait azért részesítettük előnyben, mert az egyszerre szolgáltatta a szükséges és elégséges feltételt. *Simonyi Gábor* megoldásának első fele azon az észrevételen alapult, hogy $\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\gamma = 3$ teljesülése esetén a háromszög magasságpontját, súlypontját és a köré írt kör középpontját felfűző Euler-féle egyenes párhuzamos a BC oldallal. Mint érdekességet említjük meg, hogy ennek a tételnek egy szép bizonyítását közölte a Középiskolai Mathematikai Lapok 1902-ben, Haar Alfrédnak, a világhírű matematikusnak a tollából.

2. *Az $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ számokat a következőképpen definiáltuk* $(n > 1)$:

$$a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_{k+1} = a_k + \frac{a_k^2}{n}, \qquad \text{ha} \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Bizonyítsuk be, hogy $1 - \dfrac{1}{n} < a_n < 1$.

Megoldás. A számok definíciójából következik, hogy

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n. \tag{2}$$

A bizonyítás céljára az $\dfrac{1}{a_k} - \dfrac{1}{a_{k+1}}$ különbség vizsgálata bizonyul célravezetőnek:

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{a_k^2}{na_k\left(a_k + \dfrac{a_k^2}{n}\right)} = \frac{1}{n + a_k} \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

(2) alapján ebből már következik, hogy

$$\frac{1}{n + a_n} < \frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} < \frac{1}{n}.$$

Összegezzük most az ilyen típusú egyenlőtlenségeket $k = 0$-tól $(n-1)$-ig:

$$\frac{n}{n + a_n} < \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right) < 1,$$

azaz

$$\frac{n}{n + a_n} < \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_n} < 1. \tag{3}$$

A $2 - \dfrac{1}{a_n} < 1$ egyenértékű a bizonyítandó $a_n < 1$ egyenlőtlenség-részlettel. Azt kell még igazolnunk, hogy $a_n > 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$, azaz

$$\frac{1}{a_n} < \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}. \tag{4}$$

(3)-ból közvetlenül következik, hogy

$$\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n + a_n}.$$

Ha ehhez most még figyelembe vesszük a már bizonyított $a_n < 1$ egyenlőtlenséget, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{a_n} < 2 - \frac{n}{n + a_n} < 2 - \frac{n}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n-1}$$

és éppen ezt kellett igazolnunk.

3. *Bizonyítsuk be, hogy az*

$$x^n + 1 = y^{n+1}$$

egyenletnek, ahol n 2-nél nem kisebb egész számot jelöl, nincs olyan pozitív egész megoldása x-re és y-ra, amelyben x és $n+1$ relatív prím számok lennének.

Megoldás. Írjuk fel egyenletünket

$$x^n = y^{n+1} - 1 = (y-1)(y^n + y^{n-1} + \ldots + y + 1) \tag{5}$$

alakban és tegyük fel, hogy van olyan x és y egész, amelyekre x és $n+1$ relatív prímek, de x és y kielégítik az egyenletet. Először megmutatjuk, hogy ebben az esetben $y - 1$ és $y^n + y^{n-1} + \ldots + y + 1$ relatív prímek. Ha ui. lenne közös p törzstényezőjük, akkor valamilyen A és B egésszel

$$y - 1 = Ap, \qquad y = Ap + 1; \tag{6}$$

$$y^n + y^{n-1} + \ldots + y + 1 = Bp \tag{7}$$

teljesülne. Végezzük el (7) jobb oldalán az $y = Ap+1$ helyettesítést. Mivel $Ap+1$ minden hatványában a binomiális tétel értelmében az 1-en kívül p-vel osztható tagok szerepelnek, a helyettesítés eredményeként azt kapjuk, hogy valamely C egész számmal

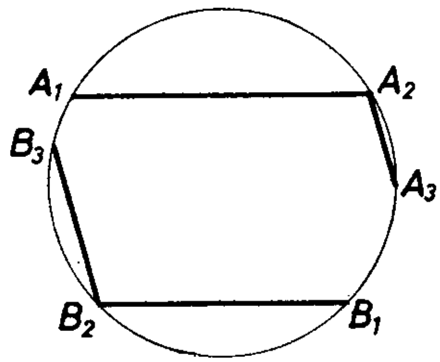
$$Cp + (n+1) = Bp,$$

amiből viszont $(B - C)p = n + 1$ adódik, de ez azt jelenti, hogy p osztója $n + 1$-nek, és (5) és (6) miatt x-nek is. Ellentmondásra jutottunk, mert így $n + 1$ és x nem relatív prímek. Csak az lehetséges tehát, hogy $y - 1$ és

$y^n + y^{n-1} + \ldots + y + 1$ relatív prímek; viszont szorzatuk egy egész szám n-edik hatványa, ezért kell, hogy mindkét tényező teljes n-edik hatvány legyen. Azonban az $y^n < y^n + y^{n-1} + \ldots + y + 1 < (y+1)^n$ miatt a második tényező két szomszédos egész n-edik hatványa közé esik, ezért nem lehet n-edik hatvány, ennélfogva ellentmondásra jutottunk, ami a feladat állítását bizonyítja.

4. *Mely n természetes számokra érvényes a következő állítás: a körbe írható $A_1A_2\ldots A_{2n-1}A_{2n}$ konvex sokszögnél az A_1A_2; $A_{n+1} + A_{n+2}$, A_2A_3; $A_{n+2}A_{n+3}$, …, $A_{n-1}A_n$; $A_{2n-1}A_{2n}$ szemközti oldalpárok párhuzamosságából következik az A_nA_{n+1}, $A_{2n}A_1$ oldalpár párhuzamossága?*

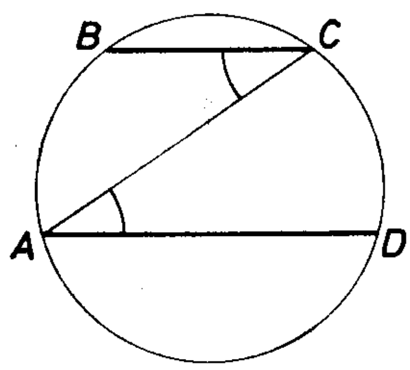
Megoldás. Két megjegyzést bocsátunk előre. Az első: ha A_1, A_2, A_3 és B_1, B_2, B_3 egy kör olyan egymás utáni pontjai, hogy a két ponthármas körüljárási iránya azonos és $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ és $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, akkor az A_2-t tartalmazó A_1A_3 ív egyenlő a B_2-t tartalmazó B_1B_3 ívvel (2. ábra).



2. ábra

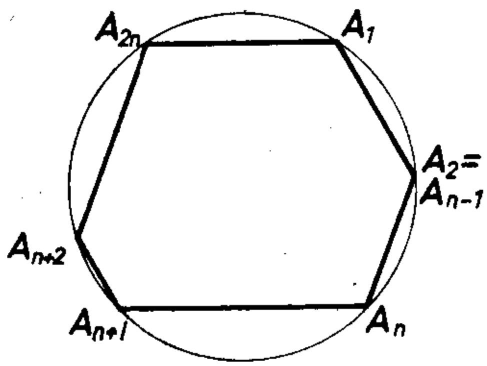
Ez abból következik, hogy az $A_1A_2A_3\sphericalangle = B_1B_2B_3\sphericalangle$, mert váltószögek, így az A_1A_3 és B_1B_3 ívekhez egyenlő kerületi szögek tartoznak, tehát egyenlők.

A második: ha az AB és CD ívek egy kör egyirányú, egyenlő hosszú ívei, akkor az AD és BC húrok párhuzamosak (3. ábra). A feltételből ui. következik, hogy $ACB\sphericalangle = CAD\sphericalangle$ (egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek), ezért a váltószögek tételének megfordításából következik, hogy $AD \parallel BC$.



3. ábra

Most megmutatjuk, hogy a feladat állítása páratlan n-ekre igaz. Tegyük fel – a feladat kikötéseinek megfelelően –, hogy a körbe írt konvex $2n$-szögben $A_1A_2 \parallel A_{n+1}A_{n+2}$, $A_2A_3 \parallel A_{n+2}A_{n+3}$, …, $A_{n-1}A_n \parallel A_{2n-1}A_{2n}$ A sokszög konvex voltából következik, hogy az $A_1A_2A_3$ és $A_{n+1}A_{n+2}A_{n+3}$, az $A_3A_4A_5$ és $A_{n+3}A_{n+4}A_{n+5}$, …, $A_{n-2}A_{n-1}A_n$ és $A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$ ponthármasok egyező körüljárásúak; és ezért első megjegyzésünk értelmében $\overset{\frown}{A_1A_3} = \overset{\frown}{A_{n+1}A_{n+3}}$, $\overset{\frown}{A_3A_5} = \overset{\frown}{A_{n+3}A_{n+5}}$, …, $\overset{\frown}{A_{n-2}A_n} = \overset{\frown}{A_{2n-2}A_{2n}}$, és mivel n páratlan, ezért a fentiekben az $\overset{\frown}{A_1A_n}$ és $\overset{\frown}{A_{n+1}A_{2n}}$ minden részívét felsoroltuk. Tehát $\overset{\frown}{A_1A_n} = \overset{\frown}{A_{n+1}A_{2n}}$, ebből viszont második megjegyzésünk alapján következik, hogy az A_1A_{2n} és A_nA_{n+1} oldalak is párhuzamosak (4. ábra).



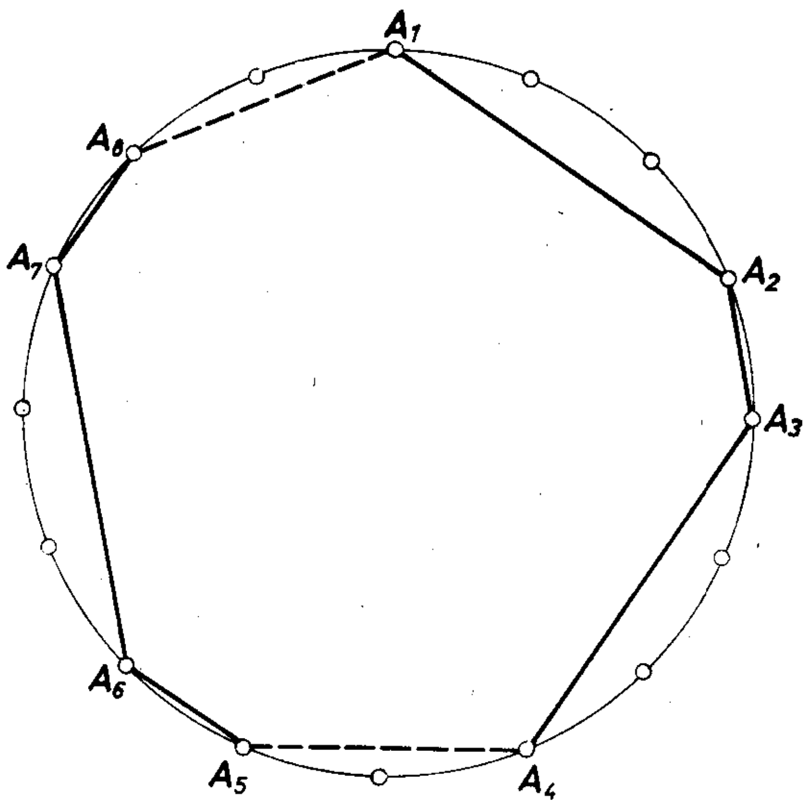
4. ábra

Egy ellenpéldán megmutatjuk, hogy ha n páros, $n-1$ oldalpár párhuzamosságából általában még nem következik az n-edik oldalpár párhuzamossága.

Válasszuk az egységsugarú körbe írt sokszög csúcsait úgy, hogy a szomszédos csúcsok közötti ívekre az alábbi feltételek teljesüljenek:

$$\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_3A_4} = \ldots = \widehat{A_{n-1}A_n} = \frac{3\pi}{2n} = \widehat{A_{n+2}A_{n+3}} = \widehat{A_{n+4}A_{n+5}} = \ldots = \widehat{A_{2n-2}A_{2n-1}};$$
$$\widehat{A_2A_3} = \widehat{A_4A_5} = \ldots = \widehat{A_{n-2}A_{n-1}} = \frac{\pi}{2n} = \widehat{A_{n+1}A_{n+2}} = \widehat{A_{n+3}A_{n+4}} = \ldots = \widehat{A_{2n-1}A_{2n}};$$
$$A_nA_{n+1} = \frac{\pi}{n} = A_{2n}A_1.$$

Ez a felosztás szemléletesen azt jelenti, hogy háromféle körív fordul elő a szomszédos csúcsok között: $\frac{3\pi}{2n}$ hosszúságú (I. típus), ennek harmadrésze, $\frac{\pi}{2n}$ hosszúságú (II. típus), és végül két ív hossza $\frac{\pi}{n}$.



5. ábra

Az I-es és II-es típusú ívek felváltva követik egymást az A_1 csúcstól az A_n-ig, majd újra az A_{n+1}-ből A_{2n}-ig (az 5. ábrán $n=4$), a csúcsokat a körbe írt $4n$ oldalú szabályos sokszög csúcsaiból választjuk ki. Ebből következik, hogy ha kiválasztjuk az A_kA_{k+1} és $A_{n+k}A_{n+k+1}$ oldalakat, ezek párhuzamosak lesznek, ha $k \neq n$, mivel az elrendezés miatt $\widehat{A_{k+1}A_{n+k}} = \widehat{A_{n+k+1}A_k}$, viszont A_nA_{n+1} és $A_{2n}A_1$ nem lehetnek párhuzamosak, mert ehhez $\widehat{A_1A_n} = \widehat{A_{n+1}A_{2n}}$

teljesülésére lenne szükség. Azonban $\widehat{A_1A_n}$ $\frac{n}{2}$ darab I. típusú és $\frac{n-2}{2}$ darab II. típusú ívből áll, tehát

$$\widehat{A_1A_n} = \frac{n}{2}\cdot\frac{3\pi}{2n} + \frac{n-2}{2}\cdot\frac{\pi}{2n} = \frac{2n-1}{2n}\pi;$$

és $\widehat{A_{n+1}A_{2n}}$ $\frac{n-2}{2}$ darab I. típusú és $\frac{n}{2}$ darab II. típusú ívet tartalmaz, ezért

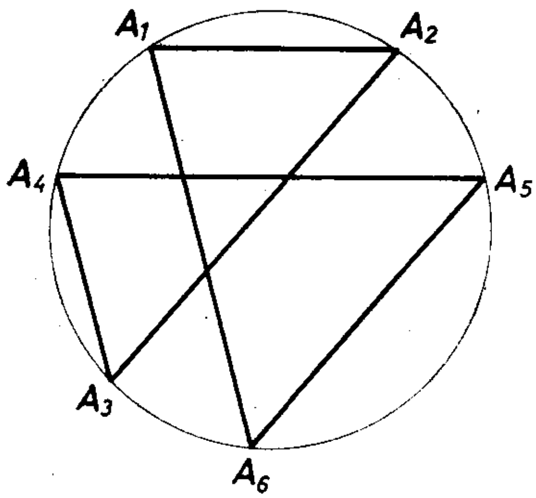
$$\widehat{A_{n+1}A_{2n}} = \frac{n-2}{2}\cdot\frac{3\pi}{2n} + \frac{n}{2}\frac{\pi}{2n} = \frac{2n-3}{2n}\pi,$$

így tehát A_nA_{n+1} valóban nem párhuzamos $A_{2n}A_1$-gyel (*Bohus Géza* példája).

Megjegyzések. Komplex számok segítségével a feladat első részére egyszerű és általánosabb érvényű megoldást lehet adni, felhasználva azt, hogy ha a komplex számsík 0 pontja köré írt körön kiválasztjuk az a, b, c, d pontokat, az ab és cd húrok párhuzamosságának feltétele az $ab = cd$ egyenlőség teljesülése. Jelöljük a sokszög csúcsaihoz tartozó komplex számokat a megfelelő kisbetűkkel (a sokszög középpontja a számsík 0 pontja). A feladat feltételei szerint

$$a_1a_2 = a_{n+1}a_{n+2},\ a_{n+2}a_{n+3} = a_2a_3,\ a_3a_4 = a_{n+3}a_{n+4},\ \ldots,\ a_{n-1}a_{n-2} = a_{2n-2}a_{2n-1},$$
$$a_{2n-1}a_{2n} = a_{n-1}a_n$$

Ezeknek az egyenlőségeknek megfelelő oldalait összeszorozva egyszerűsítés után az $a_1a_{2n} = a_na_{n+1}$ egyenlőséget kapjuk, ami éppen az n-edik oldalpár párhuzamosságát bizonyítja. Figyeljük meg, hogy ez a bizonyítás nem használta fel a sokszög konvex voltát, tehát az önmagát átmetsző sokszögvonalra is jó. Ilyen sokszöget mutat $n = 3$ esetén a 6. ábra.



6. ábra

5. *Valamely síkbeli derékszögű koordináta-rendszer x tengelyével párhuzamos egyenest akkor nevezünk triangulárisnak, ha balról jobbra haladva olyan különböző A, B, C és D pontokban metszi az*

$$y = x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s$$

egyenletű görbét, hogy az AB, AC és AD szakaszok egy háromszög oldalai lehetnek.

Bizonyítsuk be, hogy az x tengellyel párhuzamos egyenesek közül a szóban forgó görbét négy különböző pontban metszőknek vagy mindegyike trianguláris vagy egyik sem az.

Megoldás. A görbét egy, az x-tengellyel párhuzamos e egyenes messe rendre az A, B, C, D pontokban, legyenek az A koordinátái $A(t, d)$. Toljuk el a koordináta-rendszer kezdőpontját A-ba, a görbe egyenletét az új rendszerben az $x \to x+t,\ y \to y+d$ helyettesítéssel kapjuk meg:

$$y + d = (x+t)^4 + p(x+t)^3 + q(x+t)^2 + r(x+t) + s,$$

ebből :

$$y = x^4 + (4t+p)x^3 + (6t^2+3pt+q)x^2 + (4t^3+3pt^2+2tq+r)x + (t^4+pt^3+qt^2+rt+s) - d.$$

Az új együtthatókat rendre P, Q, R, S-sel jelölve, a görbe egyenlete

$$y = x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S$$

alakú, mivel azonban az origó rajta van a görbén, $S = 0$. Az A, B, C, D pontokhoz tartozó x értékek éppen az

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx = 0$$

egyenlet gyökei, az A-hoz éppen az $x = 0$ tartozik. A B, C, D pontok abszcisszáit jelölje rendre t_1, t_2, t_3, ($t_1 < t_2 < t_3$) ezek tehát kielégítik az

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$$

egyenletet. Annak feltétele, hogy a t_1, t_2, t_3 szakaszokból szerkeszthető legyen háromszög, az, hogy $-t_1 + t_2 + t_3 > 0$, $t_1 - t_2 + t_3 > 0$, $t_1 + t_2 - t_3 > 0$ egyenlőtlenségek teljesülnek (ebből az első kettő a nagyságrendi sorrend miatt eleve teljesül), azaz

$$(-t_1 + t_2 + t_3)(t_1 - t_2 + t_3)(t_1 + t_2 - t_3) > 0 \tag{8}$$

kell, hogy fennálljon.

A harmadfokú egyenlet gyökei és együtthatói közötti összefüggés alapján $t_1 + t_2 + t_3 = -P$, $t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = Q$; és $t_1t_2t_3 = -R$. Mint arról számolással könnyen meggyőződhetünk, (8) bal oldalán $P^3 - 4PQ + 8R$ áll, tehát annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az e egyenes trianguláris legyen az, hogy

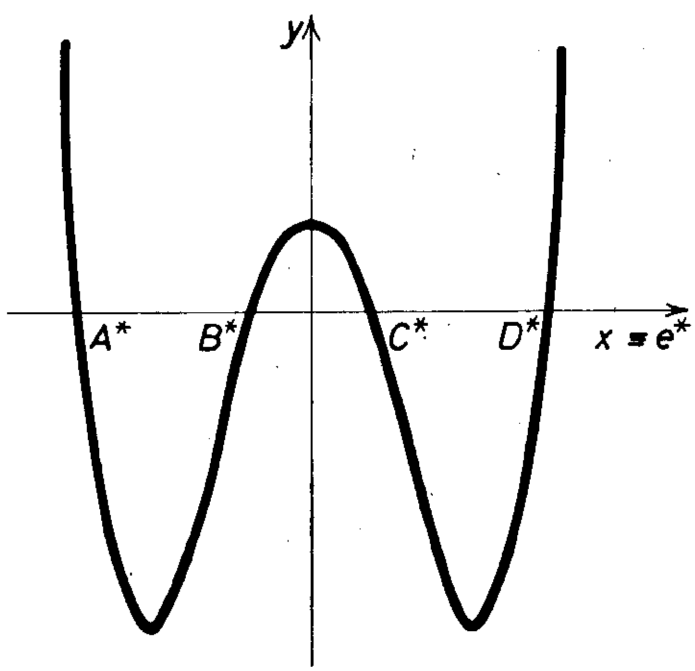
$$\delta = P^3 - 4PQ + 8R > 0$$

teljesüljön. Viszont – számolással ezt is könnyen igazolhatjuk –

$$\delta = P^3 - 4PQ + 8R = p^3 - 4pq + 8r.$$

tehát δ értéke független az e egyenes felvételétől, ezért ha egy e egyenesre $\delta > 0$ akkor mindre az; és ha egy egyenesre $\delta \leq 0$, akkor mindegyikre ez teljesül, tehát a megengedett egyeneseknek vagy mindegyike trianguláris, vagy egyike sem az. (Hasonló elven alapuló bizonyítást adott a feladatra *Tardos Gábor*).

Megjegyzés. Egy egyszerű, de a szemléletnek nagyobb szerepet biztosító megoldást adott a feladatra *Benkő Bálint*. Ennek lényege: az A, B, C, D pontok trianguláris voltának a feltétele $AB < AC < AD$ miatt $AD < AB + AC$, azaz $AB + BC + CD < AB + AB + BC$, tehát $CD < AB$, a négy pont egyenese viszont nem trianguláris, ha $CD \geq AB$. Tegyük most fel, hogy van egy e egyenes, amelyen $CD < AB$ és egy másik e' egyenes, amelyen az A', B', C', D' metszéspontokra a $C'D' \geq A'B'$ teljesül. Az e egyenest e' felé tolva ezért van egy olyan e^* helyzet, amelyen az A^*, B^*, C^*, D^* metszéspontokra $C^*D^* = A^*B^*$ áll fenn.



7. ábra

Ha viszont a koordináta-rendszert úgy választjuk, hogy az x tengely e^*-gal essék egybe, és A^*, D^*, ill. B^*, C^* szimmetrikusak legyenek az origóra (7. ábra), akkor a pontok abszcisszái rendre a, $-a$, b, $-b$ alakúak, tehát a görbe egyenlete

$$y = (x + a)(x - a)(x + b)(x - b) = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2).$$

Ez azt jelenti, hogy a görbe szimmetrikus az y tengelyre, tehát minden szóba jövő e egyenes esetén $AB = CD$, ami ellentmond annak a feltevésnek, hogy egyszerre létezik trianguláris és nem-trianguláris egyenes is.

6. *Állapítsuk meg, hogy mely számjegyek állanak közvetlenül a tizedes vesszőtől balra és jobbra*

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$$

szám tízes számrendszerben felírt alakjában.

Megoldás. A vizsgálandó szám „nagyon kicsit” változik, ha hozzáadjuk a reciprokát, $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980}$-t: Legyen

$$A = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980} + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980}.$$

Mivel

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 5+2\sqrt{6} \qquad \text{és} \qquad (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 5-2\sqrt{6},$$

azért

$$A = (5+2\sqrt{6})^{990} + (5-2\sqrt{6})^{900}.$$

Fejtsük most ezt ki a binomiális tétel segítségével

$$A = 5^{990} + \binom{990}{1}5^{989}\cdot 2\sqrt{6} + \ldots + \binom{990}{989}5\cdot(2\sqrt{6})^{989} + (2\sqrt{6})^{990} + 5^{990} -$$
$$-\binom{990}{1}5^{989}\cdot 2\sqrt{6} + \ldots - \binom{990}{989}5\cdot(2\sqrt{6})^{989} + (2\sqrt{6})^{990} = 2\cdot 5^{990} + \ldots +$$
$$+2\binom{990}{988}5^2\cdot 2^{988}\cdot 6^{494} + 2\cdot 2^{990}\cdot 6^{495}.$$

A kapott összeg minden tagja egész, ezért A is egész, és az utolsó tag kivételével minden tag osztható 10-zel, ezért A végződése az utolsó tag végződésével azonos. Az utolsó tag: $2^{991}\cdot 6^{495}$ Tudjuk; hogy 6 minden hatványa 6-ra végződik, 2 hatványainak a végződései pedig rendre 2, 4, 8, 6, … s innen periodikusan ismétlődik. Mivel $991 = 4\cdot 247+3$, azért 2^{991} 8-ra végződik és így A végződése $8\cdot 6$ végződésével azonos, tehát 8-cal.

Viszont $5-2\sqrt{6} < 0{,}2$, ezért $(5-2\sqrt{6})^{990} < (0{,}2^2)^{495} = 0{,}04^{495} < 0{,}1^{495}$, tehát $(5-2\sqrt{6})^{990}$ tízes számrendszerbeli alakjában a tizedesvessző után legalább 495 nulla következik, ezért

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980} = (5+2\sqrt{6})^{990} = A - (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1980} =$$
$$= \overline{XXX\ldots 8} - \overline{0{,}00\ldots 0XX\ldots} = \overline{XXX\ldots 7{,}999\ldots XX\ldots}$$

a tizedesvessző mellett álló számjegyek tehát … 7, 9…

Megjegyzés. Eredményre juthatunk az

$$U_n = (5+2\sqrt{6})^n + (5-2\sqrt{6})^n$$

sorozat vizsgálatával is. Megmutatható, hogy a sorozatelemek kielégítik az $U_{n+2} = = 10U_{n+1} - U_n$ ún. rekurziós formulát, azaz $U_n + U_{n+2} = 10U_{n+1}$, azaz a sorozat másodszomszédos elemeinek az összege 10-zel osztható; mivel $U_1 = 10$, $U_2 = 98$, ezért a sorozatelemek végződései: 0, 8, 0, 2, 0, 8, 0, 2… és emiatt U_{990} 8-ra végződik.