Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot fogunk elmondani, amelyek a Matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldását nem kérjük beküldeni, és a megoldásokat sem fogjuk ismertetni.

1. Melyik a nagyobb az alábbi két szám közül:

$$\sqrt[7]{7+\sqrt[7]{7}}-\sqrt[7]{7}, \qquad \sqrt[7]{7}-\sqrt[7]{7-\sqrt[7]{7}}$$

2. Igazoljuk, hogy ha az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív számok szorzata 1, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^n \leqq \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1}$$

3. Határozzuk meg azokat az m, n természetes számokból álló számpárokat, amelyekre az

$$\frac{1-\sin^2 nx}{1-\sin^2 mx} = \sin\ nx$$

egyenletnek van valós megoldása.

4. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{ctg}\frac{k\pi}{n}\cdot\cos^2\frac{k\pi}{n} = 0.$$

5. Oldjuk meg a

$$(2x-1)^n + (1-x)^n = x^n$$

egyenletet, ha n adott természetes szám.

6. Határozzuk meg a

$$\left(2-\cos^2\alpha_1\right)\left(2-\cos^2\alpha_2\right)\ldots\left(2-\cos^2\alpha_n\right)+\left(\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n\right)^2$$

kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét, ha n adott természetes szám.

7. Igazoljuk, hogy a nemnegatív a, b, c, d számokra

$$(a+c)(b+d)(2a+c+d)(2b+c+d) \geqq 4cd(2a+c)(2b+d).$$

8. Jelölje n db pozitív szám mértani közepét M, k-adik hatványközepét H_k (k természetes szám). Igazoljuk, hogy

$$(n-1)M^n \leqq nH_{n-1}^{n-1}\cdot H_1 - H_n^n.$$

9. Igazoljuk, hogy bármely (n,k) természetes számokból álló számpárhoz egyetlen olyan $f(n,\,k)$ természetes szám van, amely kielégíti az

$$\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)^k = \sqrt{f(n,k)+1}+\sqrt{f(n,k)}$$

összefüggést.

10. Milyen x,y valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség?

$$\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \geqq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$