

Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek a Matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldását nem kérjük beküldeni, és a megoldásokat sem fogjuk ismertetni.

**1.** Tekintsük a kocka csúcsain átmenő gömböt, az éleit érintő gömböt, valamint azt a gömböt, amely átmegy a kocka egyik csúcsán és érinti a szemben fekvő csúcsban találkozó éleket. Fejezzük ki az utóbbi gömb sugarát a másik két gömb sugarával.

**2.** Igazoljuk, hogy ha egy tetraéder két súlyvonala merőleges a szemközti lapra, akkor a tetraédernek legalább négy éle egyenlő hosszú.

**3.** Van-e olyan szabályos gúla, amelyben két szomszédos oldallap hajlásszöge egyenlő két szomszédos oldalél hajlásszögével?

**4.** Lehet-e egy szabályos gúla alaplapjának és oldallapjának a hajlásszöge egyenlő az (egy csúcsból induló) oldalél és alapél hajlásszögével?

**5.** Valamely háromoldalú szabályos gúla köré írt gömb átmérője 9-szerese a gúla alapjához tartozó magasságnak. Számítsuk ki két oldallap hajlásszögét.

**6.** Konvex, nem feltétlenül szabályos oktaéder tetszőleges lapjának a súlypontját kössük össze a tér adott  $P$  pontjával, majd húzzunk a kapott egyenessel párhuzamos egyenest a szemben fekvő lap súlypontján keresztül. Ilyen módon összesen 16 egyenest kaphatunk. Igazoljuk, hogy a  $P$  pontra nem illeszkedő 8 egyenes is átmegy a tér egy pontján.

**7.** Legyen az  $ABCD$  tetraéder  $DS$  súlyvonala merőleges az  $ABC$  alapra. Jelölje az alaplap egy belső  $P$  pontjának merőleges vetületeit az  $AD$ ,  $BD$ ,  $CD$  élekre  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ . Igazoljuk, hogy az  $A'D + B'D + C'D$  összeg állandó.

**8.** Adott az egységsugarú gömbön az  $A_1, A_2, \dots, A_n$  nem feltétlenül különböző  $n$  db pont. Igazoljuk, hogy van a gömbfelületnek olyan  $P$  pontja, amelyre a

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n$$

távolságösszeg legalább  $n$ .

**9.** Az  $n$  oldalú, egyenlő és adott oldalélű gúlák közül melyiknek a térfogata a lehető legnagyobb?

**10.** Bizonyítsuk be, hogy bármely tetraéder köré írt gömb átmérőjének kétszerese legalább akkora, mint a hat él négyzetösszegének a négyzetgyöke.