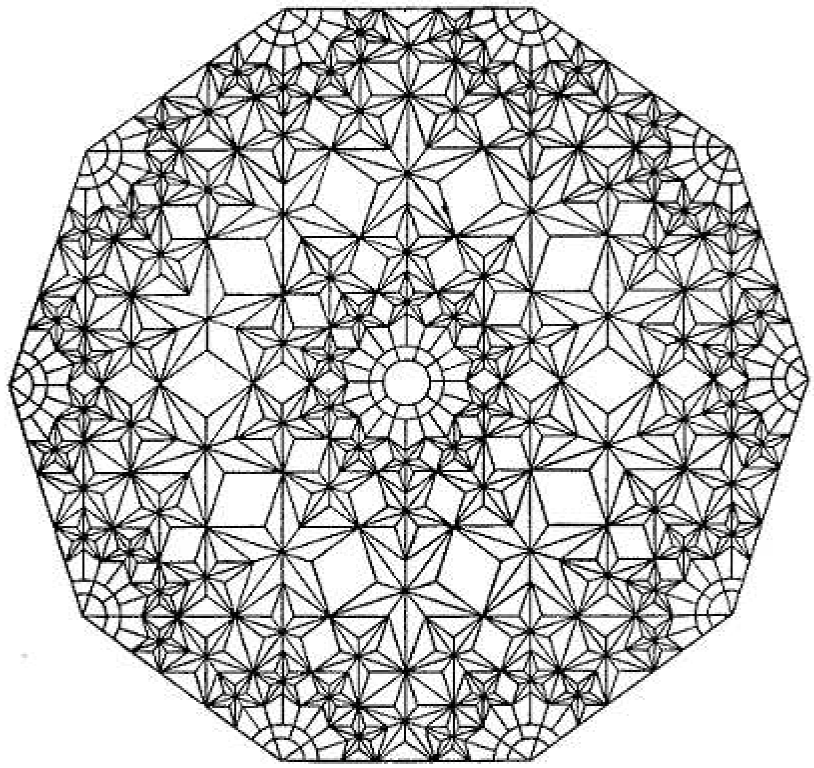
Csillagötszögek

Hátsó borítónkon egy szabályos tízszögbe különböző méretű szabályos csillagötszögeket rajzoltunk. Ha az ötszögek rajzolását a megadott minta alapján vég nélkül folytatjuk, akkor végül a tízszög területének hányad részét fedjük le? Erre a kérdésre válaszolunk.

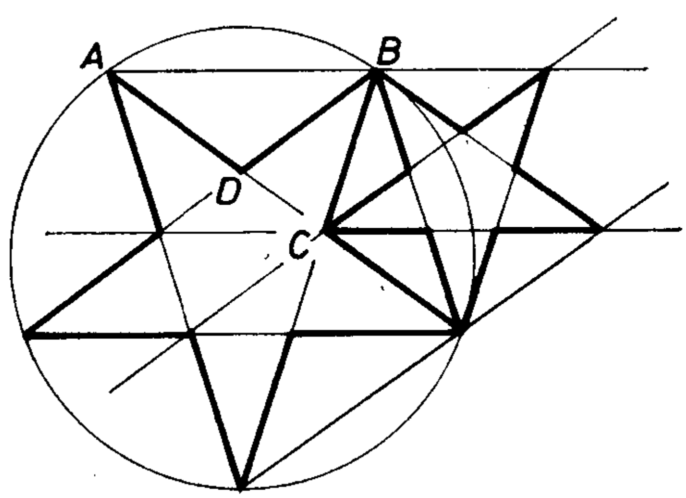


Vegyük észre, hogy a legnagyobb csillagötszögből éppen 10 darab van,; az eggyel kisebb méretűből 40; a még eggyel kisebb méretűből (az ábrán szereplő legkisebb csillagötszögből) pedig 50. Ha a következő sorozat ötszöget rajzoljuk be, akkor a középpont körül 10, a sarkoknál 4–4 új ötszög kerül a tízszögbe, azaz ismét 50. Így ha az i-edik méretű ötszög területe t_i, akkor a csillagok által lefedett terület

$$T = 10t_1 + 40t_2 + 50t_3 + 50t_4 + \ldots + 50t_n + \ldots.$$

Vegyük észre még azt is, hogy ezek a csillagok mind hasonlóak egymáshoz, és hasonlóságuk aránya az 1. ábra szerint

$$q = BC : AB.$$



1. ábra

Ezt az arányt könnyen ki tudjuk számítani. Mivel A és B egy szabályos ötszög két egymás utáni csúcsa, azért $BAC\sphericalangle = 36°$, valamint $ABC\sphericalangle = 72°$, és így az ABC háromszög egyenlő szárú. Hasonlóan az ABD és a BCD

háromszög is egyenlő szárú, és ez utóbbi hasonló az ABC háromszöghöz. De $CD = AC - AD = AB - BD = AB - BC$, és így az $AB : BC = BC : CD$ aránypárból

$$BC^2 = AB \cdot CD = AB \cdot (AB - BC) = AB^2 - AB \cdot BC,$$

azaz

$$q^2 = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = 1 - \frac{BC}{AB} = 1 - q,$$

ahonnan $q > 0$ alapján $q = (\sqrt{5} - 1)/2$.

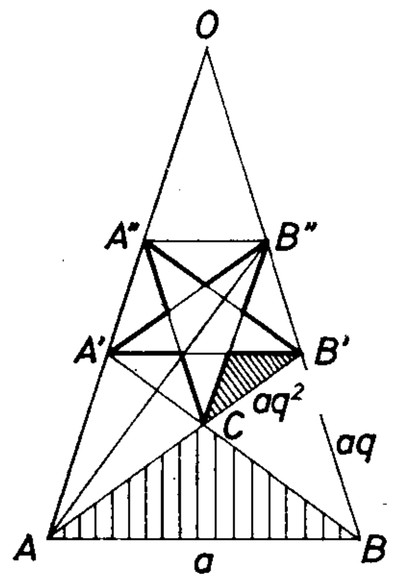
Hasonló alakzatok területének aránya a hasonlósági arányuk négyzetével egyenlő. Tehát $q^2 = t_1 : t_2 = t_2 : t_3 = \ldots$, amiből T értéke

$$T = t_1(10 + 40q^2 + 50q^4 \ldots + 50q^{2n} + \ldots).$$

Használjuk fel, hogy $0 < q^2 < 1$, és ekkor az $1+q^2+q^4+\ldots$ végtelen mértani sor határértéke (összege) éppen $1/(1-q^2)$, s azt kapjuk, hogy

$$T = 30t_1(\sqrt{5} - 1).$$

Már csak t_1 értékét kell meghatároznunk. A 2. ábrán felrajzoltuk az egyik legnagyobb csillagötszöget és a szabályos tízszögnek a hozzá tartozó középponti háromszögét.



2. ábra

Csak úgy, mint az előbb, most is azt kapjuk, hogy $AB : BB' = BB' : B'C = q$. Tegyük fel, hogy az OAB háromszög területe éppen 1, azaz a szabályos tízszög területe 10. Ekkor az ABB' háromszög területe q^2, hiszen az OAB és az ABB' háromszögek hasonlóak, és hasonlósági arányuk q. Hasonlóan az $A'CA$ és az $A''B''O$ háromszögek egybevágóak, és területük q^4. Következésképp az $A'A''B''B'C$ szabályos ötszög területe $1-q^2-2q^4$. Ebből a csillagötszög t_1 területét úgy kapjuk meg, hogy levonjuk belőle a $B'C$ alapú, vonalkázott háromszög területének ötszörösét. Ez a háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, melynek területe $T_{ABB'} - T_{BB'C} = q^2 - q^4$, s hasonlósági arányuk $AB : B'C = q^2$, tehát a levonandó terület $5q^4(q^2 - q^4)$. Összefoglalva,

$$t_1 = 1 - q^2 - 2q^4 - 5q^4(q^2 - q^4) = 65 - 29\sqrt{5} = 0{,}15\ldots.$$

Így a keresett arány

$$\frac{T}{10} = 3(\sqrt{5} - 1)(65 - 29\sqrt{5}) = 0{,}571\ldots.$$

(A Kvant c. folyóirat nyomán.)