Az F. 2255 feladathoz fűzött megjegyzésben megemlítettük, hogy *Ruzsa Imre* igazolta, hogy a feladat feltételei mellett annak eldöntésére, hogy ki hová való, legalább $5N/4$ kérdésre szükség van. Később *Fred Galvin* bizonyította, hogy általában $4N/3$ kérdésnél kevesebb sem elegendő, végül a cikk szerzője, *P. Blecher* mutatta meg, hogy a fentebb ismertetett megoldásban a kérdések száma már nem csökkenthető tovább; kevesebb kérdéssel, akárhogyan is teszi fel azokat a feladattal megbízott matematikus, nem mindig tud célhoz jutni. Pontosabban, a tudósok megismeréséhez legalább $q=3k+1$ kérdés szükséges, ha $N=2k+2$, páros szám, és legalább $q=3k$ kérdés, ha $N=2k+1$, páratlan szám.

E két állítás közül elegendő csak az elsőt igazolnunk. Valóban, tegyük fel, hogy $N=2k+1$ tudóst legfeljebb $q<3k$ kérdéssel meg tudunk ismerni. Ha a konferencián $2k+2$ tudós vesz részt, akkor bármely tudóst elhagyva, a megmaradt $2k+1$ tudós többsége is piripócsi lesz. Róluk a feltevésünk szerint q kérdéssel megtudhatjuk, ki honnan jött. Ezután a $2k+1$ tudós közül egy piripócsitól megkérdezzük, hogy a kihagyott $2k+2$-edik tudós honnan jött. Így a $2k+2$ tudós szülőhelyét legfeljebb $q+1<3k+1$ kérdéssel tisztázhatjuk. Ez viszont ellentmond annak, hogy $2k+2$ tudós megismeréséhez legalább $3k+1$ kérdést kell feltennünk.

Képzeljük most el, hogy az A matematikus azt állítja, hogy ő tud egy olyan eljárást, amely $N=2k+2$ tudós esetén $q<3k+1$ kérdéssel eldönti, hogy ki hol született. B nem hiszi, hogy ez az eljárás jó, és meg akarja mutatni A-nak, hogy tévedett. Hogyan fogjon hozzá? A-nak az az érdeke, hogy a tudósokat minél hamarább megismerje, B viszont azt akarja, hogy A-nak ez ne sikerüljön. A azt állítja, hogy mindig el tudja érni a célját, s így el kell fogadnia B következő ajánlatát:

„Állítsuk sorba az $N=2k+2$ tudóst. Ha a sorban az i-edik tudóst akarod megkérdezni arról, hogy a j-edik honnan jött, akkor ezt *tőlem* kérdezed meg, és *én* fogok válaszolni az i-edik tudós helyett. Összesen legfeljebb $3k$ kérdést tehetsz fel, és azt állítom, hogy válaszaim alapján legalább egy tudósról nem tudod eldönteni, hogy honnan jött. Vagyis lesz olyan tudós, hogy vele együtt legfeljebb k nekeresdi vesz részt a kongresszuson, és az a tudós akár piripócsi, akár nekeresdi, a piripócsiak által adott válaszok mindig igazak lesznek."

Miután A elfogadta B-nek ezt, az ajánlatát, lássuk, B hogyan válaszol A kérdéseire. B először is lerajzol N pontot, $P_1, P_2, \ldots, P_N$-et. Azután A első $k-1$ kérdésére mindig azt feleli, hogy „nekeresdi", továbbá ha A az i-edik tudást kérdezte a j-edikről, akkor a P_i és a P_j pontokat egy (másik ponton át nem menő) vonallal – éllel – összeköti. Ezzel a $k-1$ kérdés után egy gráfot kap, melyben $P_1, P_2, \ldots, P_N$ a csúcspontok, és melyben összesen $k-1$ él van. Jelöljük H-val azoknak a csúcspontoknak a halmazát, melyekből nem indul (és melyekbe nem érkezik) él. A többi csúcsot szétosztjuk a $G_1, G_2, \ldots, G_s$ részbe úgy, hogy ha $i \neq j$, akkor G_i-beli és G_j-beli csúcs között nem fut él, de egy G_i-n belül bármely csúcsból bármely csúcsba a behúzott élek mentén el lehet jutni. (A $G_1, G_2, \ldots, G_s$ gráfokat a nagy gráf *komponenseinek* nevezzük.)

Legyen a G_i részhalmazban c_i csúcs, és e_i él. Mivel G_i-ben bármelyik csúcsból bármelyikbe el kell tudnunk jutni, azért $c_i \leq e_i+1$; s mivel az egész gráfban összesen $k-1$ él van, azért

$$(*) \qquad c_1+c_2+\ldots+c_s \leq e_1+e_2+\ldots+e_s+s=k-1+s,$$

így tehát H-ban legalább $N-(k-1+s)=2k+2-k+1-s=k+3-s$ pont van.

Ezek után B eldönti, hogy melyik tudós honnan jött. Azok a tudósok, akiknek megfeleltetett pont H-ba esik, legyenek piripócsiak; továbbá legyen minden G_i-ben egyetlen olyan pont, melynek megfeleltetett tudós piripócsi, s az összes többinek megfeleltetett tudós nekeresdi. Ezzel a nekeresdiek száma (*) alapján

$$(c_1-1)+(c_2-1)+\ldots+(c_s-1) \leq -1.$$

Mivel a kongresszuson $N=2k+2$ tudós vesz részt, azért a nekeresdiekből k is lehet, így később az egyik, most piripócsinak kikiáltott tudóst B még átköltöztetheti Nekeresdre.

A-nak a „második fordulóban" még $2k+1$ kérdés áll rendelkezésére. B ezekre a kérdésekre az „igazságot" fogja felelni a következő módon. Ha egy tudósra A ebben a fordulóban többször kérdez rá, B mindig ugyanazt válaszolja. Amikor először kérdezi, hogy hova való és a tudósnak megfeleltetett pont H-ba esik, akkor B válasza „piripócsi". Ha A olyan tudósról kérdez, akinek pontja, mondjuk G_i-be esik, akkor B válasza attól függ, van-e még ezen kívül G_i-ben olyan pont, amelynek megfeleltetett tudósról A még nem érdeklődött a második fordulóban. Ha van, akkor B válasza „nekeresdi", mert a G_i-hez tartozó egyetlen piripócsi tudóst majd azok közül jelöli ki, akikről A még nem érdeklődött. De ha ilyen már nincs, akkor B válasza „piripócsi".

A-nak $2k+1$ kérdés áll rendelkezésére, a kongresszuson viszont $N=2k+2$ tudós vesz részt. Így feltétlenül lesz olyan tudós, akiről A a második fordulóban nem kérdezett. S a neki megfeleltetett pont akár H-ban van, akár valamelyik G_i-ben, s a tudós akár Piripócsról, akár Nekeresdről jött, a piripócsiak által adott válaszok mindig megfelelnek a valóságnak. Így A nem tudta eldönteni, hogy ez a tudós honnan jött, s ezzel B meggyőzte A-t – és feltehetően az olvasót is –, hogy $N=2k+2$ tudós esetén $3k+1$-nél kevesebb kérdéssel nem juthat célhoz.