Az igazmondó, a hazug és a kiismerhetetlen emberekről[1]

A gondolkodtató matematikai feladatok között különösen érdekesek a logikai feladatok. Ezek általában nem kívánnak különösebb matematikai ismereteket, és megoldásaikat még azok is meg tudják érteni, akik különben távol állnak a matematikától. Ebben a cikkben négy ilyen logikai feladatot ismertetünk. A feladatokban lesz szó igazmondó emberekről, akik minden esetben csak az igazat mondják, és hazugokról, akik csak hazugságot mondanak. Azonban, ahogyan látni fogjuk, a legnehezebbek és egyúttal a legérdekesebbek azok a feladatok, melyekben még kiismerhetetlenekkel is találkozunk, azaz olyan emberekkel, akik bármit mondhatnak csakhogy a kérdezőt minél jobban összezavarják.

1. *feladat*[2]. Két út találkozásánál, melyek közül az egyik az A városba, a másik pedig a B városba vezet, egy matematikus találkozik valamelyik város lakójával. Az A városban csupa igazmondó ember lakik, a B városban pedig csak hazugok élnek. Megtudhatja-e a matematikus egyetlen kérdéssel, hogy melyik út vezet a A városba?

Erre a feladatra még akkor is „igen" a válasz, ha még azt a további megszorítást is tesszük, hogy csak olyan kérdést lehet feltenni, melyre „igen"-nel vagy „nem"-mel kell válaszolni. Például az 1. feladatot megoldó kérdés a következő lehet: „Ez az az út (és az egyik útra rámutatunk), amelyik az ön lakhelyére vezet ?" Könnyen ellenőrizhetjük, hogy az „igen" válasz azt jelenti, hogy az út A-ba vezet, a „nem" válasz pedig azt, hogy B-be. Valóban, ha a válaszadó az A város lakója, akkor mindig igazat mond, ezért az „igen" azt jelenti, hogy a kérdéses út A-ba vezet, a „nem" válasz pedig azt, hogy B-be. Hogyha a válaszadó B-ből való, akkor az „igen" válasz – mivel ez az ember soha nem az igazat mondja – azt jelenti, hogy az út nem B-be vezet, vagyis hogy A-ba, a „nem" válasza pedig azt jelenti, hogy az út a lakhelyére, azaz B-be vezet. Így mindkét esetben az „igen" válasz jelenti azt, hogy az út A-ba, a „nem" válasz pedig azt, hogy B-be megy, ahogyan állítottuk.

Vegyük észre, hogy a megoldás során nem döntöttük el, hogy A vagy B város lakójával beszéltünk, de erre nem is volt szükségünk. A szerző sok más megoldását is ismeri ennek a feladatnak, de mindegyik egy és ugyanazon az ötleten alapszik: azt a kérdést, hogy az egyik út A-ba vezet-e, olyan formában kell feltenni, hogy a hazugnak „kétszeresen tagadott" választ kelljen adnia. S mivel a kétszeresen tagadott állítás ekvivalens az eredetivel, azért ilyenkor a hazug ugyanazt a választ adja, mint az igazmondó. Ez történt a mi megoldásunkban is.

A második feladat, amit elemezni fogunk, az elsőnek egy nehezített változata. A nehezítés abban áll, hogy a válaszadók közé egy kiismerhetetlen is kerül.

2. *feladat.* Az 1. feladat feltételei mellett tegyük fel, hogy a matematikus az elágazásnál nem egy, hanem három emberrel találkozik. Közülük az egyik az A városból, a másik a B városból való, a harmadik pedig kiismerhetetlen. A matematikus tudja, hogy a három közül az egyik A-beli, a másik B-beli, a harmadik pedig kiismerhetetlen, de azt már nem tudja, hogy ki kicsoda. Megtudhatja-e két kérdéssel, hogy melyik út vezet A-ba?

Kicsit pontosabban fogalmazva: mindkét kérdését az ott álló három ember bármelyikének felteheti, de a kérdésekre csak az válaszol, akinek azt feltette. Ezen kívül a három ember tudja egymásról, hogy „ki kicsoda" és azt is, hogy melyik út vezet A-ba és melyik B-be.

Az első feladat megoldása a következő ötletet adja. Ki lehetne-e az első kérdéssel a három ember közül választani valakit, aki biztosan nem a kiismerhetetlen (vagyis aki kiismerhető)? Ezzel ugyanis a 2. feladatot visszavezetjük az 1. feladatra: a kiválasztott embernek ugyanazt a kérdést tennénk fel, mint az első feladat megoldásánál, és a válaszból megtudnánk, melyik út vezet A-ba. Bár ilyen kérdést fel lehet tenni, de a kérdésre, legalábbis a szerző véleménye szerint, nem könnyű rájönni.

Az egyszerűség kedvéért állítsuk sorba a három embert. Az elsőnek a következő kérdést tesszük fel: „Tegyük fel, hogy mindhárman, azonnal elindulnak vagy az A-ba vagy a B-be vezető úton a következő feltételek szerint: az A város lakója A-ba, a B város lakója B-be, a kiismerhetetlen pedig – hacsak nem ön az – önnel tart, ha pedig ön a kiismerhetetlen, akkor oda indul, ahová tetszik. Vajon ezekkel a feltételekkel ez az ember (itt a másodikra mutatunk) A-ba indulna el ?"

Azt állítjuk, hogy ha a válasz „igen", akkor a harmadik ember biztosan nem kiismerhetetlen, ha pedig a válasz „nem", akkor a második nem az. Valóban, ha a kiismerhetetlent kérdeztük meg, akkor sem a második, sem a harmadik nem kiismerhetetlen. Ha a kérdést az igazmondónak tettük fel, akkor az „igen" azt jelenti, hogy a második a kiismerhetetlen, következésképp a harmadik nem az. Ellenkezőleg, a „nem" válasz arról tanúskodik, hogy a második ember a hazug (hiszen csak a hazug nem megy vele együtt). Ha ugyanezt a kérdést a hazugnak tesszük fel, akkor az ő „igen"-je azt jelenti, mivel a kiismerhetetlen B-be tart, az igazmondó pedig A-ba, hogy a második ember a kiismerhetetlen; a harmadik pedig az igazmondó. A „nem" válasz pedig, éppen ellenkezőleg, azt jelenti, hogy a második az igazmondó, a harmadik pedig a kiismerhetetlen.

Az összes lehetséges esetet végignézve láttuk, hogy az „igen" válasz esetén a harmadik, a „nem" válasz esetén a második ember egészen biztosan kiismerhető. Ily módon mindkét esetben ki tudjuk választani az egyik kiismerhető embert, és ezzel a 2. feladatot megoldottuk.

Vegyük észre, hogy az 1. feladat megoldásához hasonlóan az alapötlet az, hogy a hazugot kétszeres tagadásra kényszerítettük, azaz elértük, hogy válaszai ugyanazok legyenek, mint az igazmondó válaszai, és ezzel a kérdéssel megkülönböztettük a kiismerhetetlent a többiektől.

---

[1] Kvant, 1980, 11. szám

[2] Az 1. és a 2. feladatot a szerző először Major Péter magyar matematikustól hallotta. Lásd még Futó Péter cikkét: A sivatag törvénye, avagy: ne bántsd a hazugot! KÖMAL, 1979. szeptember, 12. oldal.

3. *feladat*[3]. Egy tudományos kongresszuson N tudós vesz részt, piripócsiak és nekeresdiek. A résztvevők között a piripócsiak vannak többen, és mindig igazat mondanak, a nekeresdiek viszont mindig hazudnak. A kongresszusra egy matematikust küldtek azzal a feladattal, hogy állapítsa meg a tudósokról, hogy ki honnan jött. Ehhez bármelyik tudóstól megkérdezheti, hogy bármelyik másik tudós honnét való. Adjunk még olyan eljárást, mellyel a matematikus $N-1$ kérdéssel ki tudja deríteni, hogy ki hova való.

A 3. feladat megoldása aránylag egyszerű. Nevezetesen kérdezzünk meg egy tetszőleges tudóst (a meghatározottság kedvéért nevezzük őt *első*nek) az összes többiről. Végeredményben a többi $N-1$ tudóst két részre oszthatjuk; azokra, akikről az első tudós azt állította, hogy piripócsiak, és azokra, akikről azt állította, hogy nekeresdiek. Csatoljuk az első tudóst az első csoporthoz, és vegyük a csoportok közül a nagyobbikat. Az ebben a csoportban levő tudósok a piripócsiak, a másik csoport tudósai a nekeresdiek. (Bizonyítsuk be!) Ezzel a feladatot megoldottuk.

Most érkeztünk el cikkünk legfontosabb feladatához. Ennek feltételei megegyeznek a 3. feladat feltételeivel, azzal a különbséggel, hogy a nekeresdiek már nem hazugok, hanem kiismerhetetlenek.[4]

Ez a feladat összehasonlíthatatlanul nehezebb az előzőnél. Ez azért van így, mert bár a hazug emberek nem mondanak igazat, de mondhatni „következetesen hazugok”, és így válaszaikból csaknem ugyanannyi információt lehet kapni, mint az igazmondó emberek válaszaiból. A kiismerhetetlenek válasza viszont tetszőleges lehet, így tőlük sokkal nehezebb feladat bármiféle információt kapni.

Az alább vázolt megoldás egy módszert ad arra, hogyan lehet $[3N/2]$-nél kevesebb kérdéssel eldönteni, hogy ki piripócsi és ki nekeresdi. Pontosabban $q=3k$ kérdéssel, ha $N=2k+1$ páratlan szám, és $q=3k+1$ kérdéssel, ha $N=2k+2$, páros szám ($k\geq 1$).

Elsőként azt az esetet tekintjük, amikor N páratlan. A keresett módszert k-ra vonatkozó indukcióval adjuk meg. Ha a konferencián $N=1$ tudós vesz részt ($k=0$), akkor ő nyilvánvalóan piripócsi, mivel Piripócsról jött a résztvevők többsége. Egyetlen kérdést sem kell ebben az esetben föltennünk, tehát $q=0=3\cdot 0$.

Tegyük fel most már, hogy minden, adott $N=2k+1$-nél kevesebb páratlan egész számra már ismerünk olyan eljárást, amely a feladatot a megkövetelt számú kérdéssel megoldja. Mutatunk $N=2k+1$-re is egy ilyen eljárást. A kényelem kedvéért számozzuk meg a konferencia résztvevőit tetszőleges sorrendben, és kérdezzük meg a második, harmadik stb. résztvevőt, hogy honnan jött az első. A kérdezősködést csak akkor hagyjuk abba, mikor az alábbi két esemény valamelyike bekövetkezik:

A esemény. A megkérdezett tudósok közül a többség azt állítja, hogy az első tudós nekeresdi.

B esemény. Azoknak a tudósoknak a száma, akik azt állították, hogy az első tudós piripócsi, éppen k.

Világos, hogy ha az A esemény következik be, és addig a pillanatig a megkérdezettek közül p állította azt, hogy az első tudós piripócsi, és n azt, hogy nekeresdi, akkor $n=p+1$. (Valóban, $n>p$, és ha $n\geq p+2$, volna, akkor az A esemény már legalább egy kérdéssel korábban is bekövetkezett volna.) Ezenkívül az is világos, hogy addig $q_1=n+p=2n-1$ kérdés hangzott el. (Speciálisan az A esemény következik be, ha mindjárt a második tudós állítja az elsőről, hogy nekeresdi, akkor $p=0$ és $n=1$.)

Ha a B esemény következett be, és n tudós azt állította, hogy az első nekeresdi, akkor a feltett kérdések száma éppen $q_1=k+n$.

Nem nehéz belátni, hogy a kérdezősködést még azelőtt befejezzük, mielőtt a konferencián részt vevő összes tudósra sor kerülne. Valóban, tegyük fel, hogy nem így volna. Ekkor az utolsó tudós megkérdezése előtt sem az A, sem a B esemény nem következett be. Legyen ebben a pillanatban p azoknak a tudósoknak a száma, akik az elsőről azt állították, hogy piripócsi, és legyen n azoké, akik szerint az első nekeresdi. Mivel az A esemény nem következett be, azért $n\leq p$. S mivel a B esemény sem következett be, azért $p\leq k-1$. Így a kérdések összes száma $n+p\leq 2(k-1)$. Ha ehhez hozzávesszük az első és utolsó tudóst is, akkor azt kapjuk, hogy a konferencia résztvevőinek száma legfeljebb $2k$, noha összesen $(2k+1)$-en vannak. A kapott ellentmondás igazolja, hogy az A és B események valamelyike biztosan bekövetkezik még azelőtt, mielőtt az utolsó tudóst is meg kellene kérdeznünk.

Tegyük fel, hogy az A esemény következett be. Állítjuk, hogy abban a csoportban, mely az első tudósból és a megkérdezettekből áll, a nekeresdiek legalább annyian vannak, mint a piripócsiak.

Valóban, ha az első tudós piripócsi, akkor az az n tudós, aki őt nekeresdinek mondta, maga is Nekeresdről jött. Mivel a csoportban összesen $1+n+p=2n$ tudós van, azért a nekeresdiek száma nem kevesebb a piripócsiak számánál. Ha viszont az első tudós nekeresdi, akkor az a p tudós is nekeresdi, akik róla azt állították, hogy piripócsi. Ezért ez esetben is a nekeresdiek száma legalább $1+p=n$.

Továbbá a feladat feltételei szerint a piripócsiak együttvéve többen vannak a nekeresdieknél, ezért az $N-2n=2(k-n)+1$ főből álló maradék társaságban a piripócsiak száma szintén meghaladja a nekeresdiekét. Az $N-2n$ nyilvánvalóan kisebb N-nél, ezért az indukciós feltételünk szerint létezik olyan, legfeljebb $q_2=3(k-n)$ kérdést felhasználó eljárás, amely tisztázza, hogy a maradék társaságban melyik tudós hová való. Válasszunk ki most ebből a társaságból egy piripócsit (ilyen nyilvánvalóan van), és kérdezzük meg tőle (erre $q_3=1$ kérdést használunk el), hogy az első tudós honnan való.

Ha Nekeresdről való, akkor az a p tudós aki azt állította, hogy ő piripócsi, biztosan Nekeresdről jött. Ezért csak az maradt hátra, hogy a Piripócsról való tudósunk segítségével megtudjuk, hogy az az n tudós honnan jött, akik az

[3] A feladatnak itt az F.2255-nek megfelelő változatát mondjuk el.

[4] Lásd az F. 2255. feladat megoldását 1980. októberi számunk 67. oldalán. Az F. 2255. feladat azt követelte, hogy *a)* $N^2/2$, illetve *b)* $10N$ kérdéssel döntsük el, hogy ki hová való.

első tudósról azt állították, hogy nekeresdi (ehhez $q_4 = n$ kérdés kell). Végeredményben tehát a konferencia mindegyik résztvevőjéről megtudtuk, hogy honnan jött, és ehhez összesen $q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 2n - 1 + 3(k - n) + 1 + n = 3k$ kérdést tettünk fel, ahogyan azt ígértük.

Ha az első tudósról az derülne ki, hogy piripócsi, akkor az az n tudós, aki őt nekeresdinek mondta, biztosan nekeresdi lakos. Így a piripócsi tudósunk segítségével csak azt kell tisztáznunk, hogy az a p tudós honnan való, akik szerint az első tudós piripócsi. Ehhez $q_4 = p$ kérdés kell, és a kérdések száma összesen $q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 2n - 1 + 3(k - n) + 1 + p = 3k - 1$, eggyel kevesebb, mint amennyit felhasználhattunk volna. Ezzel azt az esetet, mikor az A esemény következett be, teljesen kielemeztük.

Tekintsük most azt az esetet, mikor a B esemény következik be. Állítjuk, hogy ekkor az első tudós piripócsi.

Valóban, ha nekeresdi volna, akkor az a k tudós, aki őt piripócsinak mondta, szintén Nekeresdről jött volna. Így a nekeresdiekből legalább $k + 1$ lenne, több a tudósok felénél, ellentétben a feladat feltételeivel.

Így az első tudós piripócsi, és az az n tudós, aki róla azt állította, hogy nekeresdi, maga is Nekeresdről való. Most azt az első tudós segítségével tisztázzuk, hogy ki hova való a közül a k tudós közül, akik őt piripócsinak mondták (ehhez $q_2 = k$ kérdést használunk el), és hogy ki hová való azok közül, akiket korábban még nem kérdeztünk meg (ehhez további $q_3 = N - (1 + k + n) = 2k + 1 - 1 - k - n = k - n$ kérdésre van szükség).

Ezzel tökéletesen tisztáztuk mindegyik lakhelyét $q = q_1 + q_2 + q_3 = k + n + k + k - n = 3k$ kérdéssel. Mindkét lehetséges esetet – amikor az A esemény és amikor a B esemény következik be – megvizsgáltuk, tehát páratlan sok résztvevő esetére a feladatot teljesen megoldottuk.

Páros N esetén a feladat megoldása szó szerint megegyezik azzal, amit páratlan N-re megadtunk, és gyakorlásként azokra hagyjuk, akik alaposabban meg kívánják érteni a bemutatott megoldást.