I. Megoldás. Az ellipszis szimmetriatengelyeit véve koordinátatengelyeknek, egyenlete a szokásos jelölésekkel

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Itt $b<a$, hiszen $b=a$ esetén vonalunk körré specializálódik, márpedig kör köré írt négyzet szerkesztésével nem érdemes foglalkozni. Így a tengelyvégpontokbeli érintők különböző oldalú téglalapot alkotnak, tehát a szerkesztendő négyzet oldalegyeneseinek az ellipszissel való érintkezési pontjai nem eshetnek egyik adott tengelyvégpontba sem, a kívánt négyzet oldalai nem párhuzamosak a tengelyekkel.

Ismeretes,[1] hogy (1)-hez az $(x_1,\, y_1)$ pontjában húzott érintő egyenlete

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1, \tag{1a}$$

– és számunkra $x_1\neq 0$ és $y_1\neq 0$ –, tehát iránytangensét m-mel jelölve

$$m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}=-\frac{bx_1}{a\sqrt{a^2-x_1^2}}.$$

Fordítva, az érintési pont koordinátái m függvényeként:

$$x_1=\pm\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\qquad y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2m}=\mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}. \tag{2}$$

Eszerint adott m értéket két pontban ér el az iránytangens és e pontok egymás tükörképei az O centrumra. Az ellipszis szimmetriája alapján ugyanez áll a bennük megrajzolt érintőkre is, így tehát O a körülírt négyzetnek is középpontja lesz, a négyzet szomszédos oldalegyenespárjait tehát azzal jellemezhetjük, hogy merőlegesek egymásra és hogy O-tól mért távolságuk egyenlő.

Az érintő derékszögű háromszöget vág le abból a síknegyedből, amelyikben $(x_1,\, y_1)$ van, e háromszög befogói a tengelyekből lemetszett darabok, hosszuk (1a) alapján, majd (2) felhasználásával

$$e=\left|\frac{a^2}{x_1}\right|=\frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{|m|},\qquad f=\left|\frac{b^2}{y_1}\right|=\sqrt{a^2m^2+b^2}, \tag{3}$$

ezekből az érintőnek O-tól mért távolsága mint az átfogóhoz tartozó magasság

$$\frac{ef}{\sqrt{e^2+f^2}}=\sqrt{\frac{a^2m^2+b^2}{1+m^2}}.$$

A másik oldalegyenespár O-tól mért távolságát úgy kapjuk ebből, hogy m helyére $-1/m$-ot írunk. Így a követelmény, mindjárt a távolságok négyzetének egyenlőségét felírva:

$$\frac{\dfrac{a^2}{m^2}+b^2}{1+\dfrac{1}{m^2}}=\frac{a^2m^2+b^2}{1+m^2},$$

átrendezve

$$(a^2-b^2)(1-m^2)=0.$$

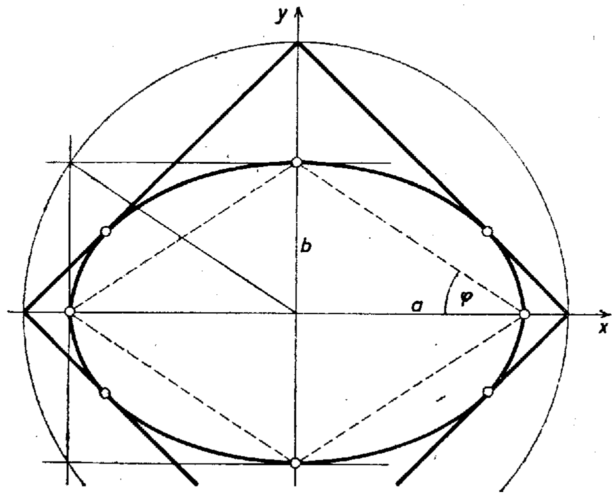
Ez $a\neq b$ miatt csak $m\pm 1$ mellett teljesül, tehát a kívánt négyzet oldalegyenesei 45°-os szöggel hajolnak a koordinátatengelyekhez.

Most már (2), majd (3) alapján $m=+1$ mellett

$$x_1=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad y_1=\mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{4}$$
$$e=f=\sqrt{a^2+b^2}.$$

(Ugyanez adódik persze $m=-1$-ből is.) Mindezek szerint a keresett négyzet csúcsai a koordinátatengelyeken vannak, az az O centrumú kör metszi ki őket, melynek sugara egyenlő az ellipszis tengelyvégpontjai által meghatározott rombusz oldalával, vagy más szóval: a tengelyvégpontokbeli érintők által meghatározott téglalap átlójának felével (1. ábra).

[1] Az iskolai függvénytáblázat-gyűjtemény 385.4. képlete.



1. ábra

Megjegyzések. 1. Tulajdonképpen többet végeztünk, mint amennyit a feladat megkívánt: *egy* körülírt négyzetet; mi pedig előbb megmutattuk, hogy csak egy négyzet van az ellipszis köré írható téglalapok közt, és azt szerkesztettük meg.

Mondhattuk volna – mint a legtöbb dolgozat tette –: *olyan* megoldást keresünk, melyben a négyzet két szimmetriatengelye, az átlói, azonosak az ellipszis tengelyeivel. (Ekkor. persze még kérdéses, hogy van-e ilyen.) Itt tehát követelményként jelenik meg a (3) tengelymetszetek egyenlősége

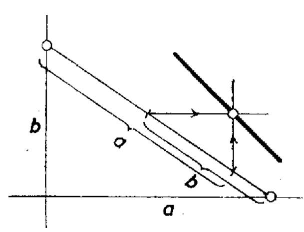
$$e=\frac{a^2}{x_1}=\frac{b^2}{y_1}=\frac{ab}{\sqrt{a^2-x_1^2}},\quad x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{a^2}{x}=\sqrt{a^2+b^2},$$

és ezzel adódott, hogy *van* ilyen megoldás. (Kiadódik tükrözésekkel is) Ez önmagában elég csekély feladat, és nem tudjuk meg, hogy egy versenytárs nem állhat-e elő esetleg egy érdekesebb, mutatósabb eredménnyel.

2. Eljárhatunk úgy is a szerkesztésben, hogy először az ellipszis és a négyzet egyik oldala E érintkezési pontját szerkesztjük meg. Az I. síknegyedben (4) alapján

$$x_1=a\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=a\cos\varphi,\qquad y_1=b\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=b\sin\varphi,$$

ahol φ a mondott rombuszoldal hajlásszöge az x tengelyhez. Fölmérjük a rombuszoldalra a kistengely végpontjából a-t, a nagytengely végpontjából b-t, az első végpont abszcisszában egyezik E-vel, a második pedig ordinátában (2. ábra).



2. ábra

3. Az oldalak irányát ismerve, 2 – 2 pontjukat kaphatjuk az ellipszis következő tulajdonságának felhasználásával: a fókusznak bármely érintőn levő vetülete rajta van a főkörön (bizonyítását az olvasóra hagyjuk). Megszerkesztjük a két fókuszt, az ezeken át a tengelyekhez 45°-os szöggel hajló két-két egyenest, végül a főkört, ez metszi ki egyeneseinkből az említett pontokat.

Burda Magdolna (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. A négyzet átlóinak irányát határozzuk meg. Az a merőleges affinitás, amely az adott ellipszist a főkörébe viszi át, az ellipszisünk köré írt négyzetet a főkör köré írt paralelogrammába transzformálja, mert párhuzamos egyenesek megfelelői párhuzamosak. A kör köré írt paralelogramma rombusz, átlói merőlegesen metszik egymást a kör (egyszersmind az ellipszis) középpontjában. És mivel a rombusz átlói a négyzet átlóinak affin megfelelői, azért a négyzet átlói csak olyan (egymásra merőleges) egyenespáron lehetnek, amelyek affin megfelelői is merőlegesek.

Ilyen egyenespárt alkot az ellipszis két tengelye, és más ilyen nincs is. Ha ugyanis az O középpontból kiinduló e, f félegyenesek merőlegesek egymásra és a nagytengely egyik partján hozzá hegyes szöggel hajlanak, akkor az $\dfrac{a}{b}(>1)$

arányú affinitással kapott képeik közti szög hegyes szög lesz, mert az új és az eredeti hajlásszög tangensének aránya mindkét félegyenes esetében $\frac{a}{b}$, tehát a hajlásszögek nagyobbak, mint az eredetiek.

Ezzel beláttuk, hogy a keresett négyzet két átlója csak az ellipszis két tengelye lehet. Tovább a fentiek szerint haladhatunk.