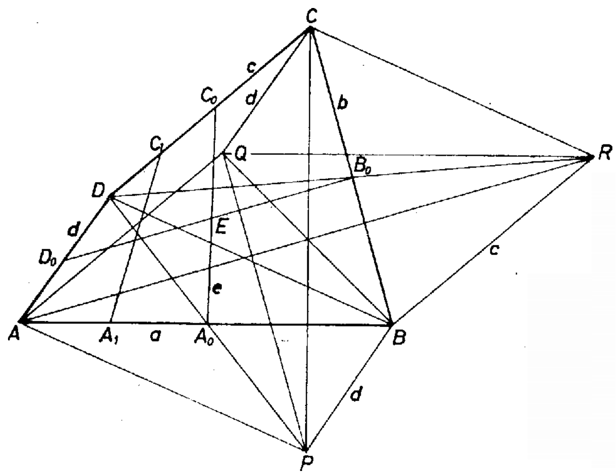
1. Jelöljük a BC, DA, AA_0, DC_0 szakaszok felezőpontját rendre B_0-lal, D_0-lal, A_1-gyel, C_1-gyel. A kívánt számítást arra az eljárásra alapítjuk, ahogyan négyszögünket az oldalak és az A_0C_0 középvonal előírt méreteiből megszerkesztenénk. [1]

Toljuk el a DA vektort a BP és CQ helyzetekbe, valamint a DC vektort a BR helyzetbe (1. ábra).



1. ábra

Ekkor $ADBP$ paralelogramma, s mivel A_0 felezi ennek AB átlóját, azért felezi DP-t is. Így A_0C_0 a CPD háromszögnek CP-vel párhuzamos középvonala, tehát $CP = 2 \cdot A_0C_0 = 2e$. Ezért a PBC háromszög megszerkeszthető ismert oldalaiból. Ezt a háromszöget a Q pont paralelogrammává egészíti ki mint B-vel szemben levő csúcs. Továbbá $ADCQ$ is paralelogramma, $QA = CD = c$, tehát A kijelölhető a B-től és Q-tól való, ismert távolságaiból, végül D paralelogrammává egészíti ki az AQC háromszöget, ezzel a szerkesztést befejeztük.

2. Az előírt számításban a fentieken túl még azt használjuk fel, hogy $BDCR$ paralelogramma, tehát DR átlója átmegy BC-nek B_0 felezőpontján és $DR = = 2 \cdot DB_0$, ennélfogva D_0B_0 – mint az RAD háromszög RA-val párhuzamos középvonala – fele RA-nak, végül hogy RA az $ABRQ$ paralelogrammának is átlója.

A Pitagorasz-tétel kétszeri alkalmazásával adódik, hogy a paralelogramma átlóinak négyzetösszege egyenlő a négy oldalának négyzetösszegével, ennek alapján

$$BQ^2 = 2(BC^2 + BP^2) - CP^2 = 2b^2 + 2d^2 - 4e^2,$$

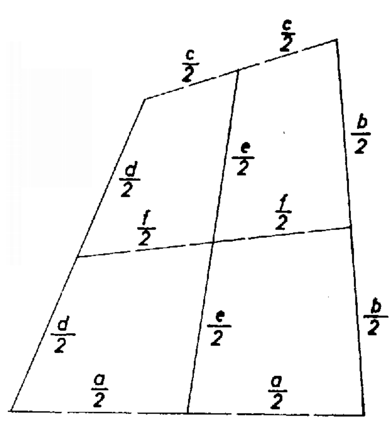
$$B_0D_0^2 = \frac{AR^2}{4} = \frac{1}{4}\{2(BA^2 + BR^2) - BQ^2\} = e^2 + \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2+d^2}{2}. \tag{1}$$

Számadatainkkal $B_0D_0 = f = \sqrt{259} = 16{,}1$ egység (a számadatok és a közbülső BQ érték eleget tesznek a BCP és BQA háromszögek szerkeszthetőségéhez megkívánt egyenlőtlenségeknek).

3. Továbbhaladás előtt (1) eredményünket megjegyzésre alkalmasabb, szimmetrikus alakba öntjük:

$$f^2 - \frac{a^2+c^2}{2} = e^2 - \frac{b^2+d^2}{2}.$$

A szemléletet segítő 2. ábrán azt is feltüntettük, hogy az e, f középvonalak felezik egymást, hiszen – mint ismeretes – végpontjaik egy paralelogramma csúcsai.



2. ábra

[1] Lásd: *Horvay–Pálmay:* Matematika a gimn. ... I. o. számára, 4. kiadás, Tankönyvkiadó, Budapest, 1969, 338. o. 24. d/feladat.

4. Mindezek szerint a második kérdés az elsőtől csak számadatokban különbözik: az ADC_0A_0 négyszög egymás utáni oldalai d, $\frac{c}{2}$ e, $\frac{a}{2}$ és a d, e oldalak felezőpontjai közti középvonal $D_0E=\frac{D_0B_0}{2}=\sqrt{64{,}75}$, és kiszámítandó a másik középvonal. (1)-et értelemszerűen alkalmazva:

$$A_1C_1^2=D_0E^2+\frac{AD^2+A_0C_0^2}{2}-\frac{AA_0^2+DC_0^2}{2}=82{,}75,\qquad A_1C_1=9{,}1 \text{ egység.}$$

Hasenfratz Anna (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Szecsői Sándor (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., II. o. t.)