I. megoldás. Jelöljük a befizető felnőttek, gyerekek, katonák számát rendre x, y, z betűvel, ekkor a következő egyenlet nem negatív egész számokban való megoldásainak $s(n)$ számát keressük:

$$4x+y+z=n. \tag{1}$$

Gondoljuk, hogy osztályokba rendezzük a megoldásokat x lehetséges értékei:

$$x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \left[\frac{n}{4}\right]$$

szerint, ahol a szögletes zárójellel a benne álló szám egész részét jelöljük, vagyis a zárójelbeli számnál nem nagyobb egészek legnagyobbikát. Az egymás utáni osztályokbeli megoldásokban a további két ismeretlen összege:

$$y+z=n,\ n-4,\ n-8,\ \ldots,\ n-4\left[\frac{n}{4}\right].$$

Általában az $y+z=k$ egyenlet (k nem negatív egész) előírt megoldásainak száma $k+1$, hiszen y rendre fölveszi a $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k$ értéket, z pedig az ezt k-ra kiegészítő szám, ezért az egymás utáni osztályok (1)-nek rendre

$$n+1,\ n-3,\ n-7,\ \ldots,\ n+1-4\left[\frac{n}{4}\right] \tag{2}$$

megoldását tartalmazzák, és ezek összege a válasz a feladat kérdésére. A (2) számok számtani sorozatot alkotnak, számuk $\left[\frac{n}{4}\right]+1$, a különbség (-4), így összegük:

$$s(n)=\left(\left[\frac{n}{4}\right]+1\right)\left(n+1-2\left[\frac{n}{4}\right]\right)$$

Ábrahám Tibor (Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Eredményünket előbb szétbontva, majd máshogyan egységesítve kezelhetőbbé alakítjuk. Aszerint, hogy

$$\begin{array}{rcccc} n= & 4i, & 4i+1, & 4i+2, & 4i+3,\\ s(n)= & 2i^2+3i+1, & 2i^2+4i+2, & 2i^2+5i+3, & 2i^2+6i+4. \end{array}$$

És mivel – fordítva – esetenként rendre

$$\begin{array}{rcccc} i= & \frac{n}{4}, & \frac{n-1}{4}, & \frac{n-2}{4}, & \frac{n-3}{4},\\ 8s(n)= & n^2+6n+8, & n^2+6n+9, & n^2+6n+8, & n^2+6n+5, \end{array}$$

azért látjuk, hogy mindegyik esetben helyes a következő:

$$s(n)=\left[\frac{n^2+6n+9}{8}\right]=\left[\frac{(n+3)^2}{8}\right].$$

Még másképpen: $s(n)$ az

$$\frac{n^2+6n+8}{8}=\frac{(n+2)(n+4)}{8}$$

számhoz legközelebbi egész szám (vagyis a tört egészre kerekített értéke).

II. megoldás. A kitűzéskor ajánlott forrásban [1] látott feladathoz képest itt csupán az az eltérés, hogy katonák belépő díja 2 Ft helyett 1 Ft. Az ottani megoldás gondolatmenetét alkalmazva, $s(n)$ egyenlő a

$$P(x)=(1+x^4+x^8+\ldots+x^{4k}+\ldots)(1+x+x^2+\ldots+\ldots x^k+\ldots)^2 \tag{3}$$

végtelen polinomban x^n együtthatójával. Tovább is az idézett megoldás szerint haladva elemi (parciális) törtekre bontjuk (3)-nak zárt

$$\frac{1}{(1-x^4)(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x^2)}$$

alakját, azaz meghatározzuk $P(x)$ várt típusú

$$P(x)=\frac{a_1}{1+x}+\frac{a_2}{(1-x)^2}+\frac{a_3}{(1-x)^3}+\frac{b}{1+x}+\frac{cx+d}{1+x^2} \tag{4}$$

[1] *Surányi János:* Polinomok és végtelen polinomok II. rész, K. M. L. 45 (1972) 193–203. o., élesebben: 200–203. o.

felbontásának a_1, a_2, a_3, b, c, d együtthatóit úgy, hogy (4) azonosság legyen. (Tulajdonképpen itt kezdődik munkánk önálló része, amihez nem volt minta.)

A törteket a szokott módon eltávolítjuk:

$$
\begin{gathered}
1=a_1(1-x)^2(1+x)(1+x^2)+a_2(1-x)(1+x)(1+x^2)+ \\
+a_3(1+x)(1+x^2)+b(1-x)^3(1+x^2)+(cx+d)(1-x)^3(1+x),
\end{gathered} \tag{5}
$$

eszerint a jobb oldalon az x-től mentes tagnak (azaz x^0 együtthatójának) 1-nek kell lennie és x minden előforduló hatványának együtthatója 0. A beszorzás után x^5, x^4, x^3, x^2 és x lépne fel, így a 6 ismeretlen együttható számára éppen 6 egyenletet kapnánk az együtthatók összehasonlításából. Ezek közül mégis csak 3-at írunk fel: x^5, x^4 és x^0 együtthatói alapján:

$$0=a_1-b-c, \tag{6}$$

$$0=-a_1-a_2+3b+2c-d, \tag{7}$$

$$1=a_1+a_2+a_3+b+d. \tag{8}$$

Az első kettő még könnyen megállapítható – a teljes kifejtés nélkül is, a harmadikhoz pedig elég $x=0$-t helyettesíteni (5) két oldalába. Ez adja azt a gondolatot, hogy más-más x értéket választva, tetszés szerinti számú egyenlőséget kapunk (5)-ből és lehet köztük egyszerűbb is. Legkönnyebb $x=1$ és $x=-1$ helyettesítése, mert így több tényező 0 lesz.

$$1=4a_3, \tag{9'}$$

$$1=16b, \tag{9''}$$

legyen végül $x=2$, így

$$1=15a_1-15a_2+15a_3-5b-6c-3d. \tag{10}$$

Összeadva (8)-at és (7)-et, a $(9')$ és $(9'')$ figyelembevételével, majd (6)-ból:

$$a_3=\frac{1}{4},\quad b=\frac{1}{16},\quad c=\frac{1}{4},\quad a_1=\frac{5}{16}.$$

Ezekkel (7)-ből és (10)-ből

$$a_2+d=\frac{3}{8},\quad 5a_2+d=\frac{15}{8},$$

amiből

$$a_2=\frac{3}{8},\quad d=0,$$

és (4) így alakult:

$$P(x)=\frac{1}{16}\left\{\frac{5}{1-x}+\frac{6}{(1-x)^2}+\frac{4}{(1-x)^3}+\frac{1}{1+x}+\frac{4x}{1+x^2}\right\}.$$

Visszatérve a végtelen polinom alakokra, a cikk első részében láttuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{1-x}&=5+5x+5x^2+\ldots+5x^k+\ldots,\\
\frac{6}{(1-x)^2}&=6+12x+18x^2+\ldots+6(k+1)x^k+\ldots,\\
\frac{4}{(1-x)^3}&=4+12x+4\binom{4}{2}x^2+\ldots+4\binom{k+2}{2}x^k+\ldots,\\
\frac{1}{1+x}&=1-x+x^2-\ldots+(-1)^kx^k+\ldots,\\
\frac{4x}{1+x^2}&=4x-4x^3+4x^5-\ldots+(-1)^m4x^{2m+1}+\ldots
\end{aligned}
$$

x^k együtthatója az első három sor összegében $5+6(k+1)+2(k+2)(k+1)==2k^2+12k+15$.
És mivel az utolsó két sor együtthatói két-, ill. négy tagú szakaszossággal ismétlődnek: $\ldots\ 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$, illetve $4, 0, -4, 0, 4, \ldots$,
azért

$$s(n)+\frac{1}{16}\left\{2n^2+12n+15+(-1)^n+4(-1)^{[\frac{n}{2}]}\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)\right\}.$$

Bezdek Károly (Dunaújváros, Münnich F. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Ha csak a konkrét feladatot néznénk, nem lenne létjogosultsága a II. megoldásnak. Ebben viszont egy sok esetben használható elv alkalmazását gyakoroltuk. Emlékezzünk vissza: az egyenletfelállításra végzett első példák mind olyanok voltak, amilyeneket egyenlet nélkül is meg lehet oldani, sőt – az akkori tudás alapján – egyenlet nélkül gyorsabban lehet.