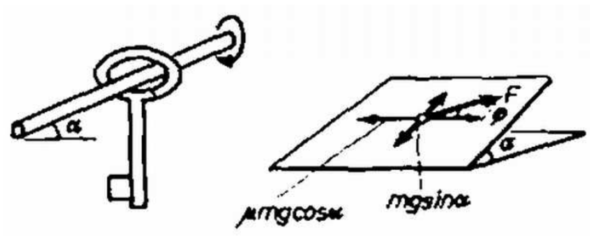
Az I. forduló feladatai

1. *Kulcsot húzunk vékony hengeres rúdra. Állítsuk a rudat lejtősen, de csak annyira, hogy a kulcs még ne csússzék le rajta (1. ábra). Ha most a rudat hossztengelye körül megforgatjuk, a kulcs lecsúszik. a) Magyarázzuk meg a jelenségé! b) Mekkora hajlásszög esetén nem csúszik le a kulcs?*

(Párkányi László)



1. ábra

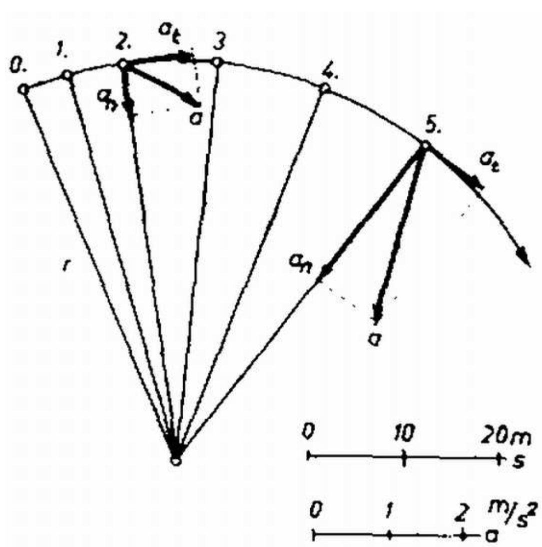
Megoldás. Ismeretes, hogy amíg nincs relatív mozgás a két test között, addig a tapadási súrlódási erő a testre ható erővel ellentétes irányú, de amint van relatív mozgás, a súrlódási erő az elmozdulással ellentétes irányú. Egy lejtőre helyezett m tömegű testnél a lejtő irányú erőösszetevő $mg \sin \alpha$; mozgás esetében a súrlódási erő $\mu mg \cos \alpha$. Ha azt akarjuk, hogy a test a lejtőn állandó magasságban, egy vízszintes vonal mentén egyenletesen haladjon, akkor a húzó erőnek a vízszinteshez képest φ szöggel felfelé kell irányulnia:

$$F \sin \varphi = mg \sin \alpha,$$
$$F \cos \varphi = \mu mg \cos \alpha.$$

Osztással kapjuk: $\operatorname{tg} \varphi = (\operatorname{tg} \alpha)/\mu$. Feladatunkban a mozgó rúd felszíne vízszintesen fejt ki erőt, és így sohasem tudja egyensúlyozni az $mg \sin \alpha$ lefelé vivő összetevőt, így a kulcs a rúd megforgatásakor akármilyen kicsi $\alpha > 0$ szög esetében is elindul lefelé.

2. *Egy test körpályán halad, a körív mentén megtett útja:* $s = 0{,}5t^2$ m $+ 2t$ m. *A* $t_1 = 2$ s *és* $t_2 = 5$ s *időpontokban a gyorsulások nagyságának aránya* $1:2$. *Mekkora a körpálya sugara?*

(Holics László)



2. ábra

Megoldás. Mivel a pálya mentén megtett út $s = 0{,}5t^2$ m $+ 2t$ m, a sebesség nagysága $v = 1(\mathrm{m/s^2}) \cdot t + 2$ m/s és a tangenciális gyorsulásösszetevő $a_t = 1\ \mathrm{m/s^2}$ (2. ábra). A normális gyorsulásösszetevő $a_n = v^2/r = (t+2)^2/r\ \mathrm{m/s^2}$. A teljes gyorsulás ezekből a paralelogramma-tétellel számítandó:

$$a = \sqrt{1^2 + (t+2)^4/r^2}\ \mathrm{m/s^2}.$$

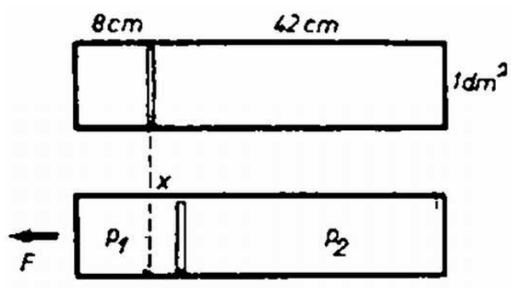
Az 5. és 2. másodperchez tartozó értékeket arányba állítva:

$$\sqrt{1 + (5+2)^4/r^2} : \sqrt{1 + (2+2)^4/r^2} = 2:1.$$

Az egyenlet megoldása: $r = 3\sqrt{51} = 21{,}42$ m.

3. *Vízszintesen fekvő,* 1 dm^2 *alapterületű hengerben súrlódásmentes dugattyú választ el* 0,8 liter *és* 4,2 liter*, mindkét oldalon* 0,02 newton/cm^2 *nyomású levegőt (3. ábra). A henger tömege* 0,8 kg*, a dugattyúé* 0,2 kg*. Ezután a hengert* 2,5 newton *állandó erővel visszük bal felé. Hová áll be a dugattyú? (A hőmérséklet változatlan.)*

(Vermes Miklós)



3. ábra

Megoldás. A dugattyút a légnyomások különbségéből eredő erő gyorsítja. Az egész berendezés gyorsulása (a levegő tömege elhanyagolható):

$$a = [2{,}5/(0{,}8+0{,}2)]\ \mathrm{m/s} = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}.$$

A dugattyú kis elmozdulás után együtt mozog a hengerrel, így a gyorsításához szükséges erő: $F = ma = 2{,}5 \cdot 0{,}2$ newton $= 0{,}5$ newton.

Mivel a dugattyút a nyomáskülönbségből származó erő gyorsítja: $0{,}5\,\mathrm{N} = (p_2 - p_1)100\,\mathrm{cm}^2$.

Boyle-Mariotte törvénye mindegyik gázra:

$$0{,}02 \cdot 8\ \mathrm{N} = p_1(8\ \mathrm{cm} + x); \qquad 0{,}02 \cdot 42\ \mathrm{N} = p_2(42\ \mathrm{cm} - x),$$

ahol x a dugattyú elmozdulása jobbra. Ezekből a gáznyomások:

$$p_1 = 0{,}16/(8+x)\ \mathrm{N/cm^2} \quad \text{és} \quad p_2 = 0{,}84/(42-x)\ \mathrm{N/cm^2}.$$

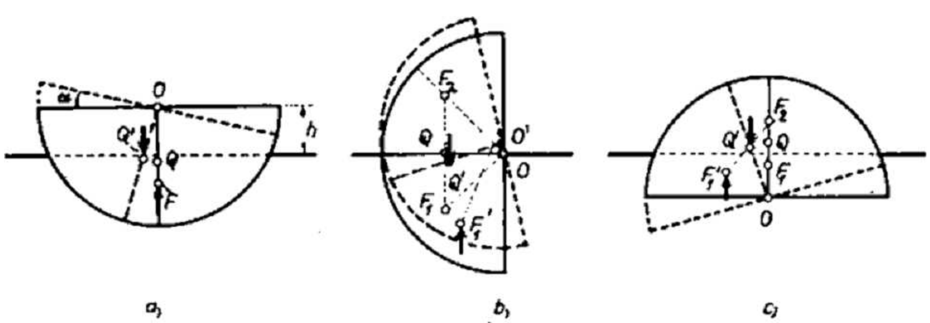
Felhasználva az előbbi egyenletet:

$$0{,}5\ \mathrm{N} = \left(\frac{84}{42-x} - \frac{0{,}16}{8+x}\right)(\mathrm{N/cm^2}) \cdot 100\ \ \mathrm{cm^2}.$$

A megoldás: $x = 2$ cm és a nyomások: $p_1 = 0{,}016\ \ \mathrm{N/cm^2}$, $p_2 = 0{,}021\ \ \mathrm{N/cm^2}$.

4. *Egy* 0,5 g/cm^3 *sűrűségű tömör félgömböt vízre helyezünk. Keressük és vizsgáljuk meg úszásának egyensúlyi helyzeteit!*

(Vermes Miklós)



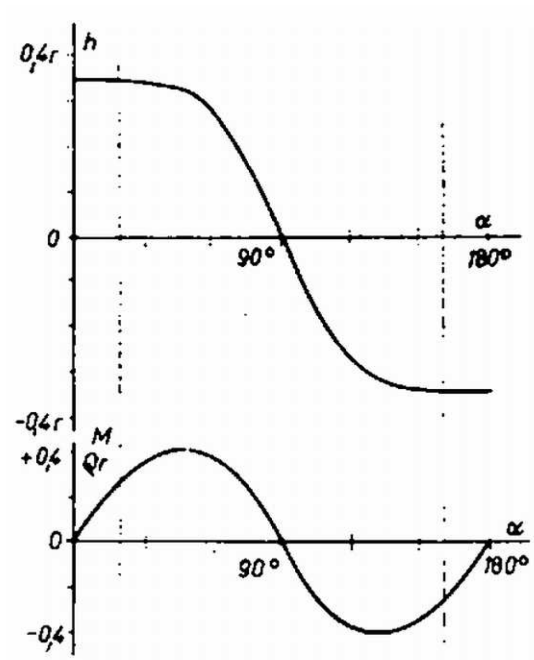
4. ábra

Megoldás. Először ússzék a félgömb vízszintes lapjával felfelé (4.a ábra). A félgömb Q súlypontja a félgömb szimmetriatengelyén van, a félgömb víz alatti szeletének, vagyis a kiszorított víznek a súlypontja pedig F-ben a víz alatti térrész szimmetriavonalán van. A félgömb térfogatát felezi a vízszint folytatásában rajzolt sík. A súly és felhajtóerő egyenlő nagy, hatásvonaluk egy egyenesre esik. Ha a félgömb α szöggel kibillen, súlypontja Q'-be kerül, de F ugyanott marad (hiszen a vízbe merülő rész ugyanakkora marad), így a testre ható forgatónyomaték a félgömböt visszaviszi eredeti helyzetébe. Ez az egyensúlyi helyzet tehát stabilis.

Tekintsük azt az esetet, amikor a félgömb sík lapjával lefelé került a vízre (4.c ábra). A vízvonal ismét felezi a félgömb térfogatát, ezért a víz alatti rész F_1 és a kiemelkedő rész F_2 súlypontjai egyenlő távolságra vannak a félgömb Q súlypontjától. Ha a félgömb kibillen helyzetéből, súlypontja Q'-be kerül. A víz alatti rész alakja megváltozik és így súlypontjának helye is. Az F_1' súlypont most a $Q'F_2$ egyenesen lesz, mégpedig úgy, hogy $F_1'Q' = Q'F_2$, mert a víz alatti és vízből kiálló térfogatrészek egyenlők. A súly és felhajtóerő most is olyan erőpárt hoz létre, amely visszaforgatja a félgömböt régi helyzetébe, azaz ez az egyensúlyi helyzet is stabilis.

Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor a félgömb sík lapja merőleges a víz szintjére (4.b ábra). Ekkor a térfogatfelezés miatt a gömb középpontja a víz szintjén van. A negyedgömbök F_1 és F_2 súlypontjai a félgömb Q súlypontján átmenő függőleges egyenesen vannak. Most is egyensúlyi helyzettel van dolgunk, mert a súly és a felhajtóerő egyenlő nagy és egy egyenesbe esik. Ha a félgömb kibillen, akkor Q is, F_1 is jobbra kerül, de F_1 nagyobb darabbal, mert nagyobb sugarú körön mozog. Olyan forgatónyomaték jön létre, amely átbillenti a félgömböt egyik stabilis helyzetébe, azaz ez az egyensúlyi helyzet labilis.

Néhány érdekességet még fel lehet sorolni. Kiindulva valamelyik stabilis egyensúlyi helyzetből egy bizonyos szögig az O középpont ugyanolyan magasan marad a vízszint felett, de ha a félgömb alapjának egyik széle víz alá kerül, a középpont h magassága csökken, majd a 90°-os helyzetben nulla lesz. A kiemelkedést numerikusan közelítve kell számítanunk, mert a víz alatti rész térfogtának képletét ilyen esetben nem tudjuk felírni. Az 5. ábra felső görbéje ilyen számítás eredményeként mutatja a bemerülési mélységet. 20,3°-ig h változatlanul 0,347, azután csökken, majd szimmetrikusan változik, amikor a síklap kerül a víz alá. További numerikus feladat a vízbe merült rész súlypontjának megkeresése és a forgatónyomaték számítása. Ennek eredményét mutatja az 5. ábra alsó görbéje.



5. ábra

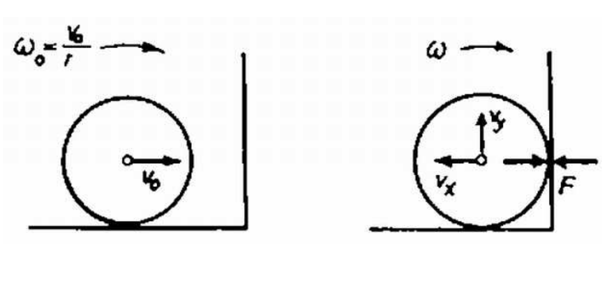
Lényegében ugyanilyenek az egyensúlyviszonyok, ha félgömb helyett bármilyen gömbszeletről van szó és a sűrűség nem 0,5 g/cm^3.

A II. forduló feladatai

1. *Egy golyó nagy sebességgel merőlegesen nekigurul a függőleges falnak és hirtelen visszapattan. a) Határozzuk meg azt a legnagyobb magasságot, ameddig a golyó kedvező körülmények között felpattanhat! b) Milyen feltétel következik ebből a súrlódási együtthatóra?*

(Nagy László)

Megoldás. Az r sugarú, m tömegű, $\theta = 2\ mr^2/5$ tehetetlenségi nyomatékú golyó v_0 sebességgel gurulva érkezik a falhoz, gurulása közben szögsebessége ω_0 (6. ábra). A falhoz érkezve igen rövid Δt ideig nagy alakváltoztató erő működik (F). Tegyük fel, hogy az F erő az ütközés teljes ideje alatt állandó és, hogy $F \gg mg$. Az ütközés után legyen a golyó középpontjának vízszintes sebességösszetevője v_x nagyságú, függőleges sebességösszetevőjének nagysága v_y.



6. ábra

Aszerint, hogy milyen mértékben rugalmas az ütközés és mekkora v_y, az ütközés utáni vízszintes sebességösszetevő nagyságára az alábbi egyenlőtlenség igaz:

$$0 \le v_x \le v_0.$$

A vízszintes irányú impulzus megváltozása:

$$m(v_0 + v_x) = F\Delta t. \tag{1}$$

Amikor az $\omega_0 = v_0/r$ szögsebességgel guruló golyó a függőleges falhoz érkezik, középpontjának még nincs függőleges sebességösszetevője, de a golyó forog a fal mellett. Elkerülhetetlenül az úgynevezett köszörülés következik be, mert a golyónak van szögsebessége, de középpontja áll. Jelentkezik μF súrlódási erő. A golyó gördülését a súlypont haladó és a súlypont körüli forgó mozgásra bonthatjuk fel. A középpont mozgására nézve az impulzustörvény:

$$mv_y = \mu F\Delta t. \tag{2}$$

A forgó mozgás (negatív) szöggyorsulása $[(v_0/r) - (v_y/r)] : \Delta t$, feltételezve, hogy a golyó a faltól való elválás pillanatában simán gördül. A fékező forgatónyomaték μFr. A forgatónyomaték egyenlő a szöggyorsulás és tehetetlenségi nyomaték szorzatával:

$$\mu Fr = \left(\frac{v_0}{r} - \frac{v_y}{r}\right) \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{2}{5} \cdot mr^2.$$

Rendezve:

$$(2/5) \cdot m(v_0 - v_y) = \mu F\Delta t. \tag{3}$$

Az (1) egyenletnek (2)-be és (3)-ba való helyettesítésével kapjuk:

$$\mu(v_0 + v_x) = v_y,$$

$$\mu(v_0 + v_x) = (2/5) \cdot (v_0 - v_y).$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$v_y = (2/7) \cdot v_0.$$

$$v_x = \big([2/(7\mu)] - 1\big)v_0. \tag{4}$$

A felrepülés magassága csak v_y-tól függ:

$$h = v_y^2/(2g) = 2v_0^2/(49g).$$

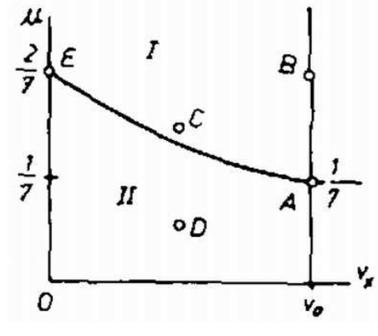
v_x értékének alakulását befolyásolja a súrlódási együttható. μ értékének olyannak kell lennie, hogy a $0 \le v_y \le v_0$ feltétel teljesüljön. (4)-ből látható, ez akkor teljesül, ha

$$2/7 \ge \mu \ge 1/7. \tag{5}$$

A súrlódási együttható és a rugalmassági viszonyoktól függő v_x kapcsolatát jobban látjuk, ha (4)-ből kifejezzük a súrlódási együtthatót:

$$\mu = \frac{2}{7} \cdot \frac{v_0}{v_0 + v_x}.$$

A 7. ábra görbéje mutatja μ és v_x e feltétel szerinti összefüggését.



7. ábra

Mi történik akkor, ha kísérleti viszonyaink olyanok, hogy μ nem tesz eleget az (5) alatti kikötésnek? Egész eddigi gondolatmenetünk azon a feltételezésen alapult, hogy a felfelé futó golyó köszörülése éppen akkor megy át sima gurulásba, amikor a függőleges fallal való érintkezés megszűnik. Ennek feltétele, hogy a $\mu - v_x$ pont a 7. ábra görbéjén feküdjön. De mi történik, ha nincs így?

Ha a μ–v_x értékpár pontja a 7. ábra I. mezejébe esik, akkor (a megfelelően nagy súrlódás folytán) a sima gördülés hamarabb áll be, mint az érintkezés megszűnése. A golyó még egy darabig simán gurul tovább, v_y már nem nő tovább és érvényes marad, hogy a legnagyobb emelkedési magasság $2v_0^2/(49g)$.

Ha μ–v_x értékpárjának pontja a 7. ábra II. mezejébe esik, akkor nem elég nagy a súrlódás ahhoz, hogy beálljon a sima gördülés, a középpont sebessége még nem érte el a $2v_0/7$ értéket, a maximális magasságot nem érjük el.

A legnagyobb emelkedési magasságot tehát akkor érjük el, ha a kísérleti adottságok olyanok, hogy a μ–v_x értékpárt jelentő pont a 7. ábra vonalára esik vagy annak I. mezejében van és ez a magasság $2v_0^2/(49g)$.

2. *Három egyenlő térfogatú gáztartály mindegyikében* 32 gramm *oxigéngáz van egyformán* 200 °C *hőmérsékleten,* 10 newton/cm^2 *nyomáson (8. ábra). A gáztartályokat vékony csövek kötik össze. Ezután a bal oldali tartályt* 100 °C*-ra hűtjük, a jobb oldalit* 300 °C*-ra melegítjük, a középsőt változatlanul* 200 °C*-on tartjuk. a) Mennyi lesz most a nyomás? b) Mennyivel változott a teljes gázmennyiség belső energiája? Az oxigén fajhője* $c_0 = 0{,}67$ joule/gK.

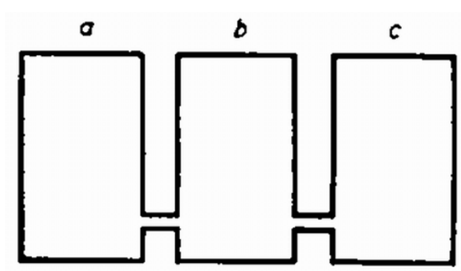
(Nagy László)

Megoldás. Annak nincs semmi akadálya, hogy a tartályokat megfelelő hőtartályokkal különböző hőmérsékleten tartsuk. Azonban a vékony csőösszeköttetés folytán a nyomás a három edényben mindig egyenlő. Ha egy hidegebb gáz nyomása ugyanannyi, mint a melegebbé, ez csak úgy lehetséges, hogy a hidegben nagyobb a molekulasűrűség. Kezdetben a három tartály mindegyikében $n_0 = 1$ mól gáz van. A hőmérséklet-változtatás után a tartályok hőmérséklete $T_a = 373$ K, $T_b = 473$ K, $T_c = 573$ K. A nyomásegyenlőségből következik, hogy a mólszámok fordítva arányosak az abszolút hőmérsékletekkel:

(1) $$n_aT_a = n_bT_b, \quad n_bT_b = n_cT_c;$$

továbbá a hőmérséklet-változás utáni n_a, n_b, n_c mólszámok összege egyenlő az eredeti mólszámösszegekkel:

$$n_a + n_b + n_c = 3.$$



8. ábra

Az egyenletrendszer megoldása adja a kísérlet végén szereplő mólszámokat:

$$n_b = \frac{3}{(T_b/T_a) + 1 + (T_b/T_c)} = 0{,}97,$$
$$n_a = \frac{T_b}{T_a} = 1{,}23, \qquad n_c = \frac{T_b}{T_c} = 0{,}80.$$

A nyomás kiszámításához gondoljuk meg, hogy a középső tartály hőmérséklete változatlan maradt, de mólszáma 1-ről 0,97-re csökkent. Ugyanilyen arányban kellett a nyomásnak is csökkennie, tehát a kísérlet után a közös nyomás:

$$p = 9{,}7 \text{ N/cm}^2.$$

Az összes gázmennyiség belső energiája a kísérlet előtt:
$3 \cdot (0{,}67$ joule/gK$) \cdot$ 32 g$\cdot$473 K = 30 423 joule.

A kísérlet után a teljes gázmennyiség belső energiája:

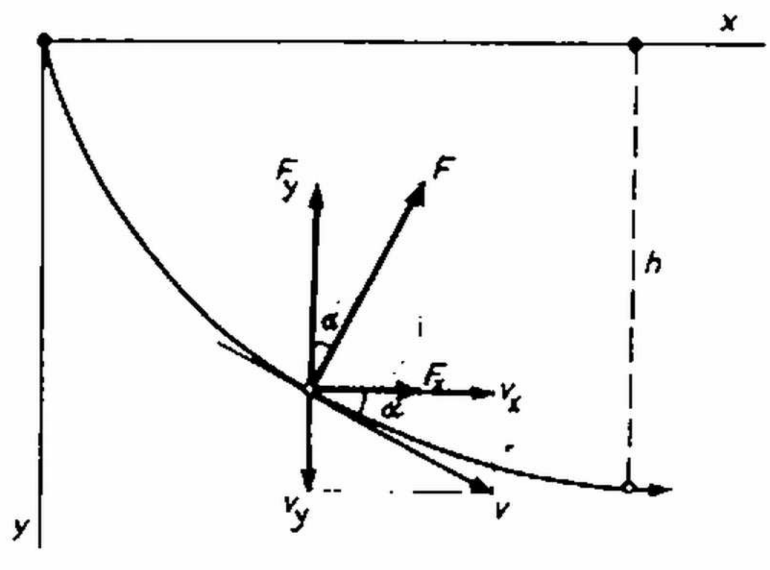
$$c_v \cdot 32(\text{g/mól}) \cdot n_aT_a + c_v \cdot 32(\text{g/mól}) \cdot n_bT_b + c_v \cdot 32(\text{g/mól}) \cdot n_cT_c.$$

(1) alapján $n_aT_a = n_bT_b = n_cT_c = 0{,}97$ mól 473 K = 459 mól K. Tehát a kísérlet végén is egyenlő a három gázmennyiség belső energiája, de 3%-kal kevesebb, mint előbb. A teljes belső energia: $3 \cdot (0{,}67$ joul/gK$) \cdot 32$ g $\cdot$ 459 $K = 29\,511$ joule. A belső energia csökkenése tehát $30\,423$ joule $- 29\,511$ joule $= 912$ joule.

3. *Vízszintes irányú, $B = 0{,}4$ tesla indukciójú homogén mágneses térben $m = 0{,}003$ gramm tömegű, $Q = +5 \cdot 10^5$ coulomb töltésű kis golyót ejtünk el. a) Milyen mélyen van pályája legmélyebb pontja? b) Mennyi a golyó legnagyobb sebessége?*

(Légrádi Imre)

Megoldás. B indukciójú mágneses térben v sebességgel mozgó Q töltésre (mintegy áramra) a sebességre merőlegesen az $F = QBv$ nagyságú ún. Lorentz-erő hat. Mivel ez az erő merőleges a sebességre, a Lorentz-erő nem növeli a sebességet és a mozgási energiát. A lefelé eső töltés görbülő pályán halad (9. ábra). h mélységben a mágneses tértől függetlenül a sebesség $v = \sqrt{2gh}$.



9. ábra

Vizsgáljuk az x irányban lejátszódó jelenséget. Az F Lorentz-erő vízszintes F_x összetevője: $ma_x = QBv \sin\alpha$. Azonban $v \sin\alpha = v_y$ a sebesség függőleges összetevője. A gyorsulást és sebességet részletesen felírva:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = QB \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

illetve: $\dfrac{d}{\mathrm{d}t}(mv_x - QBy) = 0$. Ebből – figyelembe véve, hogy $t = 0$ esetén $v_x = 0$, $y = 0$ – kapjuk:

$$mv_x = QBy.$$

Ez lényeges eredmény: a sebesség vízszintes összetevője arányos a mélységgel.

A pálya legalsó pontján h mélységben $v_y = 0$, tehát $v_x = v$:

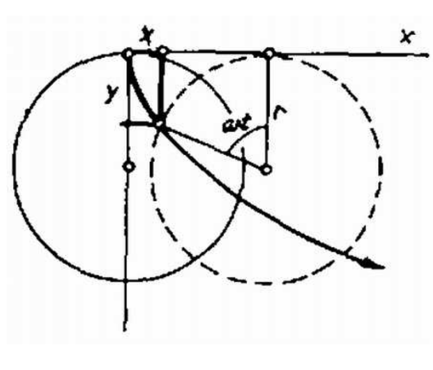
$$m\sqrt{2gh} = QBh.$$

Innen a mélység:

$$h = \frac{2m^2 g}{Q^2 B^2} = 0{,}441 \text{ m},$$

a sebesség pedig

$$v = \frac{2mg}{QB} = 2{,}94 \text{ m/s}.$$



10. ábra

Az eső töltés pályája ciklois. Ezt a következőkkel támaszthatjuk alá. Ha a cikloist létrehozó kör ω szögsebességgel t másodpercig gurul, akkor a ciklois pontjának koordinátái (10. ábra):

$$x = \omega t \cdot r - r \sin \omega t,$$
$$y = r - r \cos \omega t.$$

A sebesség x irányú összetevője:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega r - \omega r \cos \omega t = \omega (r - r \cos \omega t) = \omega y.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy az x irányú sebességösszetevő arányos az y mélységgel, ami az eső töltés mozgásának is jellemzője. A kezdeti feltételek figyelembevételével nem nehéz belátni, hogy *csak* a ciklois görbének van ez a tulajdonsága.

A III. kísérleti forduló

A feladat első része egy folyadékos nyomásmérő hitelesítése volt. Ezután egy gumilabda felfújásához szükséges munka meghatározására került sor.