Előzetes megjegyzés. A kérdést természetesen csak arra az esetre vizsgálhatjuk, ha a logaritmusok értelmezve vannak, más szóval

az adott logaritmusok alapszámára teljesül $x>0$, $x\neq 1$, ill. $y>0$, $y\neq 1$;

a keresett logaritmus alapszámára ezen felül teljesül $xy\neq 1$

a kérdéses z számra is $z>0$; továbbá $z\neq 1$, hiszen $z=1$ esetén adatok nélkül is tudjuk, hogy 0 az eredmény.

I. megoldás. Az alapszám megváltoztatására vonatkozó logaritmusazonosságok közül elég felhasználni a „fölcserélési tételt”:

$$\log_b a=\frac{\log_a a}{\log_a b}=\frac{1}{\log_a b}.$$

Eszerint és más azonosságokkal:

$$\log_{xy} z=\frac{1}{\log_z xy}=\frac{1}{\log_z x+\log_z y}=\frac{1}{\dfrac{1}{\log_x z}+\dfrac{1}{\log_y z}}=\frac{(\log_x z)\cdot(\log_y z)}{\log_x z+\log_y z}.$$

Az előrebocsátottak értelmében a végzett alakítások megengedettek.

Érdemes megemlíteni néhány speciális esetet.

I. ha $x=y$, akkor

$$\log_{x^2} z=\frac{1}{2}\log_x z;$$

II. ha $x=z$, akkor

$$\log_{xy} x=\frac{\log_y x}{1+\log_y x};$$

III. ha $x=1/z$, akkor

$$\log_{xy}\frac{1}{x}=-\frac{\log_y z}{-1+\log_y z}=\frac{\log_y z}{1-\log_y z}$$

(megjegyezve, hogy $xy\neq 1$ folytán $y\neq z$, a nevező tehát $\neq 0$).

Mayer Zsuzsa (Pécs, Széehenyi I. Gimn., III. o. t.)
Vladár Károly (Kiskunhalas, Szilády Á. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Akik nem idegenkednek a törtektől, nem legsürgősebb dolguk a törtek lehető „eltávolítása”, azok számára így egyszerűbb a fenti eredmény:

$$\frac{1}{\log_{xy} z}=\frac{1}{\log_x z}+\frac{1}{\log_y z}.$$

2. A logaritmus jól begyakorolt azonosságai helyett célhoz érünk a logaritmus definíciójával is, és így fölelevenedik, hogy a logaritmusazonosságok a definíció alapján csupán más alakjai a hatványazonosságoknak.

II. megoldás. Vezessünk be rövid jelöléseket az adatokra és az ismeretlenre:

$$\log_x z=a,\ \log_y z=b,\ \log_{xy} z=c.$$

Így a logaritmus definíciója szerint:

$$z=x^a=y^b=xy^c,$$

amiből

$$x=z^{\frac{1}{a}},\quad y=z^{\frac{1}{b}},$$

tehát

$$z=\left(z^{\frac{1}{a}}\cdot z^{\frac{1}{b}}\right)^c=z^{c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\quad(\neq 1),$$

innen pedig a kitevőket egybevetve

$$1=c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{c(a+b)}{ab},\qquad c=\frac{ab}{a+b},\qquad \frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$