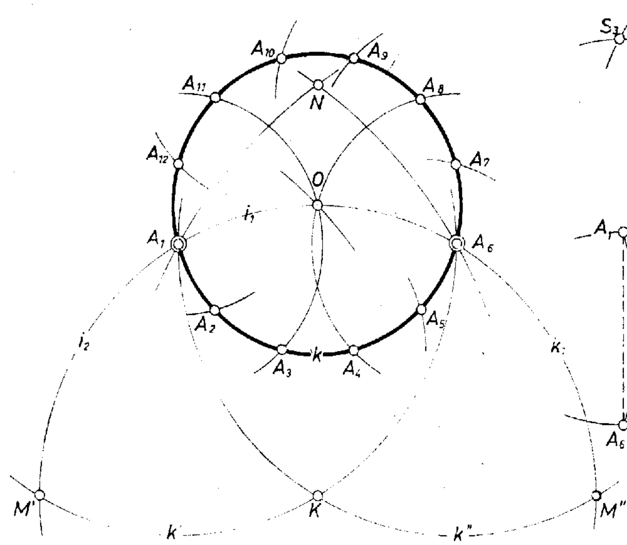
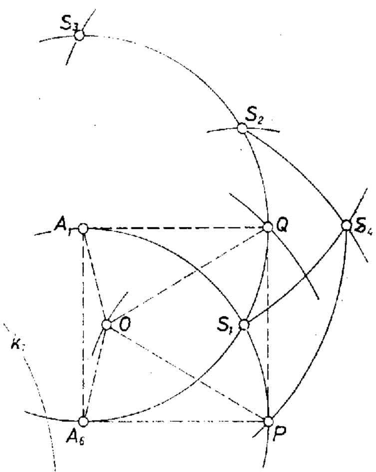
I. megoldás. A feladat lényege a szabályos 12-szög O középpontjának megszerkesztése. Ugyanis ennek ismeretében megrajzolható az idom köré írt k kör, azon pedig kizárólag körzővel kijelölhetők a 12-szög további csúcsai, mert egyrészt a páratlan, másrészt a páros indexű csúcsok együttese egy-egy szabályos hatszög csúcsait alkotja, tehát A_1-ből, ill. A_6 ból kiindulva OA_1 sugarú körívekkel egymás után kimetszhetők.

k-nak A_1A_6 húrja O-ból $(6-1)\dfrac{360^\circ}{12} = 150^\circ$ szögben – tompaszögben – látható. Az ekkora látószöggel bíró pontok egy az A_1, A_6 pontokon átmenő i_1 köríven vannak, az ezt teljes körré kiegészítő i_2 körív pontjaiból viszont A_1A_6 látószöge $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

Így A_1A_6 az i_2-nek (és egyben i_1-nek) K középpontjából $2\cdot 30^\circ = 60^\circ$ szögben látható, vagyis K az A_1A_6 mint alap fölé szerkesztett szabályos háromszög csúcsa, az A_1 és A_6 körül A_1A_6 sugárral írt k' és k" kör metszéspontja. (A szimmetria alapján elég csak az egyik metszéspontjukat venni, a másik megoldás ennek tükörképe lenne az A_1A_6 tengelyre.)

Az így megrajzolt i_1 ívet a keresett O felezi, hiszen az OA_1, OA_6 húrok k sugarai, egyenlők. Vegyük észre, hogy az i_1-et tartalmazó k_1 körben az előbbi k'-vel és k"-vel való M', ill. M" második metszéspontok egy átmérő végpontjait jelölik ki, tehát ezek, valamint O és O-nak K-ra való tükörképe 4 egyenlő részre osztják k_1 kerületét. Ennélfogva O megszerkesztése azonos a Mohr-féle 2. feladattal[1], ezzel az előrebocsátottak értelmében a feladatot megoldottnak tekinthetjük. (A felhasznált körívek: M' és M" körül $M'A_6 = M$"A_1 sugárral – metszéspontjuk N – , végül az M' körül KN sugárral írt körív metszi ki O-t; a teljes szerkesztésben O-ig 6, a befejezésig 15 körívet használunk fel.) – A szerkesztés helyességét ebben az esetben nem szükséges bizonyítani.

Megjegyzés. Az 1184. gyakorlathoz[2] fűzött 2. megjegyzésben vázoltunk egy csak körzővel elvégezhető eljárást adott középpontú kör tetszőleges íve felezőpontjának megszerkesztésére. Annak az eljárásnak itt azt a különleges esetét láttuk, amikor a felezendő ívhez tartozó húr egyenlő a körív sugarával. (Ott – más betűzéssel – A_1A_6K, $KM'A_1$ és KM"A_6 egybevágó egyenlő szárú háromszögek.)

II. megoldás. Tovább használva a fenti jelöléseket, megmutatjuk, hogy O azonos az A_1A_6PQ négyzet PQ oldala fölé befelé szerkesztett szabályos háromszög csúcsával (2. ábra).

Valóban, így A_1QO és A_6PO egybevágó egyenlő szárú háromszögek, $A_1O = A_6O$, és az O körüli 3 hegyesszög összege 210°, tehát $A_1OA_6\sphericalangle = 150^\circ$. Innen az előrebocsátottak szerint fejezhetjük be a szerkesztést.

Itt O előállításához (a fenti 6-tal szemben) 10 körívet használtunk fel: A_1A_6-ot egységnek választva, egymás után A_1, A_6, S_1, S_2 körül 1 sugárral (az S-ek segédpontok), A_6 és S_3 körül $A_6S_2 = S_3S_1 = \sqrt{3}$ sugárral, A_1, és A_6 körül $A_1S_4 = \sqrt{2}$ sugárral, végül P és Q körül ismét 1 sugárral írjuk le a kört. Q-t az S_1S_2 ív felezőpontjaként szerkesztettük.

Megjegyzés. Kérdezheti az olvasó: miért számláltuk meg a felhasznált köríveket? Kezdjük a választ kerülő úton: a szerkesztési pontosság szempontjából. Elgondolásaink gyakorlati végrehajtásába eszközeink és szemünk pontosságának korlátozottsága, vonalaink véges szélessége következtében pontatlanságok csúsznak be. Kézenfekvő azt gondolni, hogy ezek – ugyanazon személy és eszközök esetében – annál nagyobbak, minél több lépésből áll a szerkesztés. (Függ persze mástól is, a körívek meredek vagy lapos metsződésétől stb.)

Erre tekintettel említjük meg, hogy a 2. ábrán S_2 kijelölését megtakaríthatjuk (és vele 1 körívet), ha helyette előállítjuk az első két kör másik, S_1' metszéspontját is (ami S_1 tükörképe). Ekkor S_3 kimetszését egy lépésben végzi el

[1] Lásd *Strommer Gyula*: Mohr „Euclides Danicus"-a. K.M. L. 45 (1972) 105. o.: Osszuk az adott kör kerületét négy egyenlő részre.
[2] K. M. L. 37 (1968) 151. o.

az S_1 körüli S_1S_1' sugarú körív. – Látjuk ebből, hogy a gondolt gyakorlati pontatlanságot újra elméleti ügyeskedéssel, az ábra tetszetős szimmetriájának csökkentésével próbáljuk javítani.

Visszatérve a tiszta elméleti vonalra és tovább kutatva az ábrában rejlő ilyen lehetőségek után, még egy körívet megtakaríthatunk. Miután P-t kimetszettük az A_6 körüli, 1 sugarú körből az A_1, körüli, $\sqrt{2}$ sugarú ívvel, hagyjuk el ennek az ívnek a párját is, állítsuk körzőnk nyílását máris az utolsó két lépésben szükséges 1 egységre és Q-t inkább P körüli ívvel messük ki az A_1 körüli, 1 sugarú körből, mert ezt az ívet O előállításában még egyszer kihasználhatjuk.

Keressen az érdeklődő olvasó körív megtakarításokat a szabályos 12-szög csúcsainak kijelölésében, miután O-t és k-t már megkapta.

III. megoldás. Szimmetriája miatt a 12-szögnek még egy csúcsa van A_1-től akkora távolságban, mint A_6, éspedig A_8; és $A_6A_1A_8\sphericalangle = 30°$. Ha tehát A_1A_6L szabályos háromszög (és L azon a partján van A_1A_6-nak, amelyiken O-t kívánjuk), akkor A_8 az A_1, körüli, A_1A_6 sugarú kör rövidebbik A_6L ívének felezőpontja, a fentiek szerint szerkeszthető. Másrészt A_6A_8 mindjárt a k sugara, tehát O az A_6A_8 alap fölé befelé szerkesztett szabályos háromszög csúcsa.

Itt A_8 előállításáig ugyanúgy 6 ívet rajzolunk, mint az I. megoldásban O-ig. O és k újabb 3 körív, de ekkor k az előkészítő körívekből kimetszi A_{11}-et, A_4-et és A_{10} et. A hátralevő 6 csúcs 3 párban kimetszhető $A_{10}A_{11}$ (=oldalhossz) körzőnyílással, az A_1, A_4, A_8 csúcsot véve középpontnak.

Hídvégi Attila (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

IV. megoldás. Kezdhetjük eljárásunkat A_7, az A_1-gyel átellenes csúcs megszerkesztésével is, ez azonban több lépésből áll. A_7A_6 merőleges A_6A_1-re és $A_7A_1A_6\sphericalangle = 15°$ így $A_6A_7 = A_1A_6 \operatorname{tg} 15° = 2A_1A_6 - \sqrt{3}A_1A_6$, a két tag szerkesztését már láttuk, különbségük az idézett cikk 7. feladata szerint, A_7, a 6., O pedig a 4. feladat szerint szerkeszthető.

V. megoldás (vázlat). Felhasználhatjuk az idézett cikk 8. feladatát is: három ismert hosszúsághoz a negyedik arányos megszerkesztését. Tetszőleges körben kijelöljük egy szabályos hatszög csúcsait és megfelezzük két szomszédos csúcs közti ívét, így kiválaszthatjuk az A_1A_6 bosszúság $A_1'A_6'$ megfelelőjét. Körünk sugarát $A_1A_6 : A_1'A_6'$ arányban nagyítva, megkapjuk a keresett k sugarát és vele O-t. – Ez is lényegesen több lépésből álló szerkesztés.

Búza Antal (Dunaújváros, Münnich F. Gimn., IV. o. t.)