I. forduló

1. Igaz-e, hogy ha egy síknégyszögben a középvonalak hosszának összege egyenlő a kerület felével, akkor ez a négyszög paralelogramma?

2. Oldja meg a természetes számok halmazán az

$$x^3 - y^3 = 602$$

egyenletet.

3. Határozza meg azokat az x értékeket, amelyekre a

$$2\sin^2 x - 3 \cdot \sqrt{3}\sin x - \cos^2 x + 10$$

kifejezés a legkisebb, illetve a legnagyobb értéket veszi fel.

4. A p paraméter mely értékei mellett esik az $x^2 + px + 9 = 0$ egyenlet egyik gyöke az $[1;2]$, másik gyöke pedig a $[4;5]$ zárt intervallumba?

5. Egy háromszög súlypontját és beírt körének középpontját összekötő egyenes párhuzamos a háromszög egyik oldalával. Bizonyítsa be, hogy az oldalak mérőszámai egy számtani sorozat egymást követő elemei.

6. Adott a síkban egy 1 cm sugarú kör, továbbá középpontjától 2 cm-re egy e egyenes. Legyen A az e egyenes által meghatározott félsíkok közül a k kört nem tartalmazó zárt félsík tetszőleges rögzített pontja, és tekintse mind-azokat az $ABCD$ paralelogrammákat, amelyeknek B csúcsa a k körre, D csúcsa az e egyenesre illeszkedik. Mi lesz e paralelogrammák C csúcsának az összessége (mértani helye)? (Az egy egyenesre eső, különböző pontokból álló olyan – pontra vonatkozóan – szimmetrikus pontnégyeseket is tekintse paralelogrammáknak – elfajuló paralelogrammáknak –, melyek esetében az AC és BD szakaszok felezőpontja azonos!)

7. A H halmaz elemei azok a hétjegyű számok, amelyekben az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyek mindegyike pontosan egyszer szerepel. Igazolja, hogy a H halmaz bármely két különböző eleme közül egyik sem osztója a másiknak!

8. Egy összejövetelre a házigazda meghív néhány vendéget nyomtatott meghívón azzal, hogy további vendégeket hívhatnak meg levélben, és ezeknek az újabb meghívottaknak is jogukban áll vendégeket meghívni telefonon. Az összejövetelen minden meghívott vendég megjelent és természetesen a házigazda is. Az ismerkedésnek a következő formáját választják: névsorban szólítják egyenként a jelenlevőket, a szólított átad egy-egy névjegyet meghívóinak, továbbá felkéri azokat, akiket ő hívott meg, és azokat, akik neki már adtak névjegyet, adjanak azoknak is, akiknek ő már adott névjegyet.

Bizonyítandó, hogy végül is a házigazda mindenkitől kap névjegyet!

II. forduló

A szakközépiskolák és a gimnáziumok általános tantervű III–IV. osztályos tanulói részére

1. Legyen

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3},$$

ahol n pozitív egész számot jelent!

Bizonyítsa be, hogy van olyan k pozitív egész szám, amelyre a

$$P_k = a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_k$$

szorzat értéke nagyobb 1000-nél.

Melyik a legkisebb ilyen k szám?

2. Adott egyenlő szárú derékszögű háromszögbe írjunk minden lehetséges módon szintén egyenlő szárú derékszögű háromszöget úgy, hogy a beírt háromszögek csúcspontjai az adott háromszög különböző oldalainak egy-egy belső pontjával egyezzenek meg.

A beírt háromszögek közül melyiknek legkisebb a területe? Hányad része ez a legkisebb terület az adott háromszög területének?

3. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy

a) a szám jegyeinek összege prímszám;

b) a szám jegyeinek szorzata prímszám;

c) bármilyen sorrendbe írjuk is a szám jegyeit, mindig prímszámot kapunk!

(Tízes számrendszerbeli számokról van szó; az 1-et nem tekintjük prímszámnak; egytagú összegen magát az egy tagot, egytényezős szorzaton magát az egy tényezőt értjük.)

A gimnáziumok matematika I. szakosított tantervű III–IV. osztályos tanulói részére

1. Egy tetraéder szemközti élpárjainak a hossza rendre: a, a_1; b, b_1; c, c_1. Bizonyítsuk be, hogy az $a+a_1$, $b+b_1$, $c+c_1$ hosszúságú szakaszokból szerkeszthető háromszög!

2. Egy számsorozatot a következőképpen definiálunk:

$$a_n = \frac{n}{10^{[\lg n]+1}} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

($[x]$ azt a legnagyobb egészet jelenti, amely nem nagyobb x-nél.) Igazoljuk, hogy minden olyan A valós számhoz, amelyre $0{,}1 \le A \le 1$ teljesül, van a sorozatnak olyan részsorozata, amelynek éppen A a határértéke!

3. Egy kétkarú mérlegen $kn+1$ darab golyó tömegét hasonlítjuk össze (k, n pozitív egészek). A golyókat minden lehetséges párosításban a mérlegre téve azt tapasztaljuk, hogy a mérleg $b = \frac{1}{2}(k-1)kn^2 + (k-1)n + 1$ esetben billen ki (azaz a feltett két golyó különböző tömegű; egy golyópárt csak egyszer helyezünk rá a mérlegre). Bizonyítsuk be, hogy a golyók között van legalább $k+1$ különböző tömegű! Igaz-e ez az állítás akkor is, ha a mérleg csak $b-1$ esetben billen ki?

A gimnáziumok matematika II. szakosított tantervű III–IV. osztályos tanulói számára

1. Egy síknégyszög merőleges vetülete két egymásra merőleges sík mindegyikén olyan négyzet, amelynek oldala 2 egységnyi. Mekkora a síknégyszög kerülete, ha egyik oldala $\sqrt{5}$ hosszúságú?

2. Minden, 2-nél nagyobb a egészhez adjunk meg olyan

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$$

különböző számokat, hogy a

$$\{H = a_i + a_j \mid 1 \le i < j \le n\}$$

halmaznak a lehető legkevesebb eleme legyen.

Oldjuk meg úgy is a feladatot, hogy a H halmaznak a lehető legtöbb eleme legyen!

3. Egy sivatagi expedíciónak a sivatag szélén levő táborból egy liter ivóvizet kell eljuttatnia a sivatagnak olyan pontjára, amely n napi járásra van az expedíció táborától. A szállítást úgy kell megszervezni, hogy

a) az expedíció tagjai sohasem vihetnek magukkal fejenként 3 liternél több ivóvizet;

b) a sivatagban töltött minden nap folyamán az expedíció valamennyi tagjának meg kell innia egy-egy liter vizet;

c) feladatuk teljesítése után az expedíció valamennyi tagjának vissza kell térnie a táborba.

Legalább hány liter ivóvíznek kell lennie a táborban, hogy teljesíthető legyen a kitűzött feladat?