Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) I. forduló

1. Mely x számok elégítik ki a következő egyenletet:

$$\left|\frac{x+2}{3}\right|+1=|x-2,5|.$$

2. Három pozitív egész szám összege ugyanannyi, mint szorzatuk. Melyek lehetnek ezek a számok?

3. Adjuk meg azokat az N természetes számokat, amelyekre az

$$x=\frac{N+11}{N-9}$$

tört is természetes szám.

4. Legyen az ABC háromszög AC oldalának felezőpontja D, továbbá messe a C-n és a BD szakasz F felezőpontján átmenő egyenes az AB oldalt az E pontban. Milyen arányban osztja ketté E az AB oldalt?

5. Tekintsünk a síkon 3999 db pontot. Van-e olyan kör, amelynek belsejében pontosan 1980 db pont van?

6. Melyek azok a kétjegyű természetes számok (a tízes számrendszerben írva), amelyekre maga a szám 17-tel nagyobb, mint a számjegyeinek szorzata?

7. Mi a mértani helye az $ABCD$ négyzet belsejében azon P pontoknak, amelyekről csak annyit tudunk: a PAB, PBC és PCD háromszögek közt található két egybevágó?

8. Egy 80 tagú számsorozatról tudjuk, hogy bármely közbülső tagja egyenlő szomszédainak szorzatával, továbbá az első 40 tag szorzata is 8, valamint összes tagjának szorzata is 8. Határozzuk meg a sorozat első és második elemét!

Kezdők, II. forduló

A szakközépiskolások feladatai

1. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$

és

$$a^2+b^2+c^2=a+b+c=1$$

és

$$abc\neq 0,$$

akkor

$$xy+xz+yz=0.$$

2. Péter és öccse, Miklós versenyt futott 1 km-es távon. Péter 50 másodperc előnyt adott, és így még 50 m-re volt a céltól, amikor öccse befutott. „Lebecsültem erődet – szólt –, holnap csak 100 m előnyt kapsz.” Másnap Miklós valóban bátyja után ért célba 16 másodperccel.

A versenytáv mely pontján előzte meg a második napon Péter az öccsét? (Feltesszük, hogy egyéni teljesítményük a két napon ugyanaz volt.)

3. Ismerjük egy trapéz egyik szögét, átlóinak hosszát és az átlók által bezárt szögek egyikét.

Hány trapéz szerkeszthető, ha az adatok a fenti sorrendben 50°, 70 cm, 10 cm és 40°? (A szerkesztés menetének leírása után elég vázolni a változatokat.)

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$(a+c)x-(a-c)y=2ab$$
$$(a+b)y-(a-b)x=2ac$$

2. Megegyezik a szakközépiskolák 2. feladatával.

3. Bontsunk fel egy háromszöget kis háromszögekre úgy, hogy bárhogyan kiválasztva három pontot a felbontást adó háromszögek csúcsai közül, azok ne essenek egy egyenesre. Igazoljuk, hogy a felbontásban szereplő kis háromszögek száma csak páratlan szám lehet.

A szakosított matematika II. tantervű osztályok feladatai

1. Megegyezik a szakközépiskolák 2. feladatával.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy konvex négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha található a belsejében olyan O pont, hogy bármely O-n keresztülmenő egyenes a kerületét felezi.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha bárhogyan is választunk ki egy egységnyi oldalú négyzet belsejében 19 különböző pontot, akkor van olyan háromszög, amelynek mindhárom csúcsa ezen 19 pont közül való és területe legfeljebb $\frac{1}{18}$ területegység.

Haladók (legfeljebb II. osztályosok), I. forduló

1. Igazoljuk, hogy ha öt pozitív egész szám szorzata (a tízes számrendszerben) két nullára végződik, akkor van köztük négy olyan is, amelyeknek a szorzata szintén két nullára végződik!

2. Egy hegyesszögü háromszög magasságpontját a háromszög két oldalegyenesére tükrözzük. Bizonyítsuk be, hogy a két tükörképpontot összekötő egyenes által lemetszett háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz!

3. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}.$$

4. Adott az ABC hegyesszögű háromszög. Határozzuk meg az olyan téglalapok átlói metszéspontjának mértani helyét, amelyek két csúcsa az AB oldalon, egy-egy csúcsa pedig az AC, ill. BC oldalon van!

5. Igazoljuk, hogy

$$1979^{1980}+64$$

összetett szám!

6. Adott az $ABCD$ téglalap. Az A-ból, B-ből, C-ből, ill. D-ből induló AB, BC, CD, ill. DA félegyenesen rendre kijelöljük az A_1, B_1, C_1, ill. D_1 pontot úgy, hogy

$$\frac{AA_1}{AB}=\frac{BB_1}{BC}=\frac{CC_1}{CD}=\frac{DD_1}{DA}=k>0$$

teljesüljön.

A k szám milyen értékére lesz az $A_1B_1C_1D_1$ négyszög területe minimális?

7. Igazoljuk, hogy $48!-7^6$ osztható 7^7-nel ($n!$ az 1-től n-ig terjedő természetes számok szorzatát rövidíti, $n>1$).

8. Egy $ABCD$ húrnégyszög AB és CD oldalegyenese az E pontban, AD és BC oldalegyenese az F pontban metszi egymást. Az AED szög felezője az AD oldalt a P, a BC oldalt a Q pontban, az AFB szög felezője a DC oldalt az R pontban, az AB oldalt az S pontban metszi. Igazoljuk, hogy a $PQRS$ négyszög rombusz!

Haladók, II. forduló

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Az $ABCD$ négyszög belsejében úgy helyezkedik el a P pont, hogy az $ABPD$ négyszög paralelogramma. Igazoljuk, hogy ha $CDP\sphericalangle=PBC\sphericalangle$, akkor $DCP\sphericalangle=ACB\sphericalangle$.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden $n>0$ egész szám előállítható a következő alakban:

$$n=a_1\cdot 1^2+a_2\cdot 2^2+\ldots+a_k\cdot k^2,$$

ahol az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ számok mindegyike $+1$ vagy -1 és k alkalmas természetes szám!

3. Adott 20 szám: $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{10}$ és $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{10}$. Igazoljuk, hogy az a_1+b_1, a_1+b_2, $\ldots$, $a_{10}+b_{10}$ (nem feltétlenül különböző) 100 számot be lehet osztani 10 darab 10-es csoportba úgy, hogy a számok összege mindegyikben ugyanannyi legyen.

A szakosított matematika I. tantervű osztályok feladatai

1. Megegyezik az általános tantervű osztályok 2. feladatával.

2. Határozzuk meg azokat a pozitív egész számokat, amelyeknek a tízes számrendszerbeli alakjára igaz, hogy számjegyei összegének a négyzete egyenlő az eredeti szám köbével.

3. Két metsző körvonal a síkot négy tartományra bontja, ezek közül három korlátos. Igazoljuk, hogy nincs olyan körvonal, amely egyszerre mindhárom korlátos tartományt két egyenlő területű részre bontja!

A szakosított matematika II. tantervű osztályok feladatai

1. Tegyük fel, hogy Anti bélyeggyűjteményében bármilyen megadott értéknél drágább bélyegből legfeljebb kétszer annyi van, mint Bandi gyűjteményében. Bizonyítsuk be, hogy Anti gyűjteménye legfeljebb kétszer értékesebb, mint Bandié.

2. Egy n pozitív egész számot jónak nevezünk, ha vannak olyan $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ (nem feltétlenül különböző) pozitív egész számok, hogy

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$$

és

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1.$$

Tudjuk, hogy 33-tól 73-ig minden egész szám jó. Igazoljuk, hogy minden 73-nál nagyobb egész szám is jó.

3. Egy egyenes két megadott kört az A, illetve B pontban érint, továbbá mindkét kört belülről érinti egy harmadik kör, a D, illetve C pontokban. Igazoljuk, hogy A, B, C és D egy körön fekszenek.