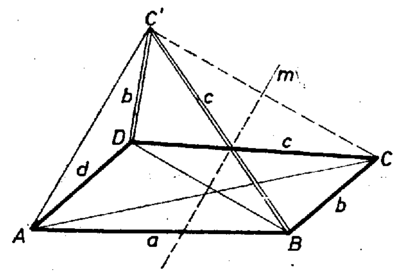
Jelöljük a szóban forgó négyszög csúcsait A, B, C, D betűvel úgy, hogy $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ legyen. A konvexség alapján az AC átló a négyszög belsejében halad, így

$$2t=2t_1+2t_2,$$

ahol t_1 az ACB háromszög területe, t_2 pedig az ACD-é. Mármost

$$2t_1\le ab,\qquad 2t_2\le cd,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha az a és b, illetve c és d oldal merőlegesen áll egymásra. Ezzel beláttuk I. helyességét. (Itt a konvexségből csak azt használtuk föl, hogy B és D az AC-nek két oldalán van, vagyis ez áll az I.-ben összeszorzott a, b és. c, d oldalpárokra is.)



Mármost ha I.-ben az egyenlőség érvényes, akkor B-nél is, D-nél is derékszög van, ezért B és D az AC átló mint átmérő fölötti Thalész-körön vannak, tehát négyszögünk húrnégyszög.

A II. állítás csak abban tér el az I.-től, hogy benne – amahhoz képest – b és c fel van cserélve. Ezt visszavezethetjük az I.-re. Vegyük C-nek C' tükörképét a BD átló m felező merőlegesére, ekkor az $ABC'D=N'$ négyszög egymás utáni oldalai a, c, b, d, és területe is t, hiszen $CC'||BD$, tehát a BDC és BDC' háromszögek egyenlő területűek, és t-t bármelyikükből a BDA háromszög területének hozzáadásával kapjuk, mert C a BD-nek A-t nem tartalmazó partján van a konvexség folytán, és ugyanott van C' is. Így I.-ből következik a II. állítás. (Megjegyezzük, hogy az $ABC'D$-ről nem tudjuk, hogy konvex, az AC' átló haladhat kívül is, itt viszont, csak az volt a lényeges, hogy BD a belsejében halad.)

És ha azt tudjuk, hogy a II. állításban érvényes az egyenlőség jele, akkor az iméntihez hasonlóan A, B, C' és D ebben a sorrendben egy kör kerületén vannak, és ezen C is rajta van mint C'-nek tükörképe a BD húr felező merőlegesére, ez ugyanis átmérő. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Fürst András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. A feladat természetesen nem azt állítja, hogy húrnégyszögben $ab+cd$ és $ac+bd$ mindegyike megadná a terület 2-szeresét; csak azt, hogy ha a húrnégyszögben két szög derékszög, akkor a szemben fekvő derékszögeket bezáró oldalakból képezett szorzatok összege $2t$. Mindkét képlet csak akkor helyes, ha a fenti C' azonos C-vel, azaz $b=c$ és ekkor persze $a=d$ is fennáll, vagyis ha a négyszög húrdeltoid. (Ekkor viszont nem érdemes beszélni két képletről.)