Egy ausztráliai matematikus visszaemlékezései a régi Matematikai Lapokra

Ha egy magyar diák Ausztráliára gondol, úgy minden bizonnyal egy óriási méretekre felfújt Magyarország képe jelenik meg képzeletében, mely fejjel lefelé úszkál valahol a déli tenger közepén, s melynek erdeiben őzek helyett kenguruk ugrándoznak, a mókusok helyett pedig koala–mackók tekingetnek le a vándorra. Kissé nagyobb zavarban volna, ha Budapest helyettesítési értékét keresné; a régmúlt olimpiáról talán inkább Melbourne jutna eszébe, de ha hallott a hírneves sydneyi hídról vagy éppenséggel az operaházról, úgy komoly problémái támadhatnak: melyik is nagyobb, Sydney, Melbourne vagy Budapest. S aligha lehetne hibáztatni tájékozatlanságát, mert a két nagy ausztrál város majdnem egyforma nagyságú, s mindkettő kissé nagyobb Budapestnél, több mint 2 1/2 millió lakossal. A sydneyi operaházat érdemes egyébként a geometriában érdekelt olvasónak külön megemlíteni: olyan, mintha Arkhimédész egy játékos (vagy talán hóbortos) pillanatában álmodta volna a kikötőbe (Syracusa vagy Sydney, mi a különbség ?). Semmi kétség, hogy az ókorban a világ egyik csodájaként tisztelték volna, mint a piramisokat. Égbe nyúló, fantasztikus alakzatú szárnyai mind egy azonos sugarú gömb felületének darabjaiból vannak összerakva és a gömbhéjakat lefedő csillogó fehér téglák oly gyönyörűen illeszkednek egymáshoz, mintha dacolnának Euler poliéder–tételével, mely ezt az illeszkedést megtiltja vagy legalábbis nem veszi jó néven. De hát ki is hallott Arkhimédész idejében Euler tételéről?

Persze a Matematikai Lapok olvasóit talán inkább az érdekelné, hogy milyen is az élet egy ilyen nagyon távoli országban a matematikában érdekelt középiskolás szempontjából. Egy magamfajta vándornak, ki időnként megjelenik Budapesten, hogy visszaálmodja magát diákéveibe, a legfeltűnőbb az, hogy tulajdonképpen milyen kevés a lényegbevágó különbség a nagy társadalmi, politikai, szociális és gazdasági különbségek ellenére. Egy sydneyi diák talán kevesebb geometriát és kissé több analízist tanul, mint itthoni diáktársai, de ezek meglehetősen jelentéktelen részletek; az ő legfőbb gondja csakúgy, mint magyar társaié, az, hogy a lehető legjobb eredménnyel essék át a vizsgáin. Kissé másképpen vizsgáztatják, mint itthoni társait: utolsó évében egy nagy nyilvános vizsgát kell letennie, ami főleg abban különbözik az itteni érettségitől, hogy sokkal több kérdésre kell felelnie (ez nagyjából tréning dolga) és minden tantárgyban (melyet a diák bizonyos korlátok között szabadon megválaszthat) mindenki pontosan ugyanazokat a kérdéseket kapja az egész államban. Nem azt mondtam, hogy az egész országban; mert Ausztrália hat állam szoros szövetsége: Nyugat- és Dél–Ausztrália, Viktória, Új–Dél–Wales, Tasmánia és Queensland (a „királynő földje”, emlékezetül Viktória királynő hosszú uralkodására), nem számítva Canberrát, hol a szövetségi kormány székel, s mely nem tartozik egyik államhoz sem. Az államoknak nagy mértékű önkormányzatuk van, ami például abban is megnyilvánul, hogy a középiskolák tantervei különböznek, és így a vizsgakérdések sem lehetnek ugyanazok a különböző államokban. Egészen a legutóbbi időkig ez az önkormányzat még olyan furcsaságokat is szült, hogy a vonatsínpároknak a különböző államokban különböző nyomtávolságuk volt. (Alig hiszem, hogy stratégiai okokból. Az egyetlen fajta háború, amit ausztrál államok valaha is viseltek egymással, ádáz szócsaták voltak a szövetségi parlamentben.) Még jól emlékszem olyan időkre, alig 20–25 évvel ezelőttre, amikor éjfélkor ki kellett cihelődni a vonatból az államhatáron és átballagni a szomszédos sínen álló vonathoz, mikor az ember Perthből Adelaide-be vagy Melbourne-ből Sydney-be utazott.

Visszatérve a középiskolás matematikára, az olvasó nyilván szeretné megtudni, hogy van-e a Középiskolai Matematikai Lapoknak és a különböző versenyeknek mása Ausztráliában. Bizony van! és erről szeretnék kissé részletesebben beszámolni, főleg mert a Lapoknak – ha közvetetten is – egész jelentős szerepe volt ezen intézmények meghonosításában Ausztráliában. Tudni kell, hogy a II. világháborút megelőző események nyomására jó néhányunk szerteszéledt a világon, s nem kis számban olyanok is, kik diákéveikben a Lapok feladatainak lelkes megoldói voltak. Néhányan közülünk Ausztráliába vetődtünk; magamon kívül Klein Eszter (alias Szekeres Györgyné) és Wachsberger Márta, kinek férje, Schossberger (Svéd) György ugyan nem küldött megoldásokat a Lapokba, de elég jó matematikus volt ahhoz, hogy mindnyájunkat megverjen a középiskolai tanulmányi és az Eötvös– versenyen (a mai Kürschák verseny elődjén). A mi évfolyamaink alkották a régi Lapok hőskorát; a lap oldalai hemzsegnek oly híres nevektől, mint Erdős Pál, Hajós György, Turán Pál, hogy csak a legfényesebb csillagokat említsem. Mi magunk közt csak „Faragó lapok”-nak becéztük a lapot, odaadó szerkesztője, Faragó Andor tiszteletére. Maga Faragó Andor a magyar matematika fejlődésének egyik legkevésbé méltányolt alakja; tanúja voltam nemrégen egy itteni „vándorgyűlésnek”, ahol sok szó esett a régi Lapokról, de az ő neve még csak meg sem lett említve. Ő maga a későbbi eszeveszettség áldozata lett, de emléke él a számtalan volt diákban, akik lelkes követői voltak és később az ő szellemét igyekeztek elterjeszteni a világ minden sarkában. Nem kétséges, hogy sokunk életének adott döntő irányítást Faragó Andor tevékenysége. Több mint fél évszázad után még mindig él az emlékezetemben az a nap, mikor fizikatanárom, Novobátzky Károly, megjelent a Faragó–lapok példányaival az osztályban, s előfizetésre buzdított bennünket. Én akkor már hetedikes voltam (ma harmadikosnak neveznének) s még ma is úgy tekintem ezt a napot, mint életem legdöntőbb napját. Mindaddig nem is tudtam, hogy a matematika ennyire érdekelhet, és úgy éreztem, hogy egy új világ nyílik meg előttem. A Lapokbeli vetélytársaim közül jó néhánnyal lett később szoros baráti kapcsolatom az egyetemi évek alatt és után. Maga Novobátzky Károly minden iskolai tanárom közt messze a legkiemelkedőbb egyéniség volt, kinek csodálatos fizikaóráit mindnyájan (még a gyengébbek is) lélegzetvisszafojtva követtük. Csak a háború után méltányolták tudását, és a Tudományegyetem elméleti fizika tanszékére nevezték ki professzornak.

Hogyan tettük el jó kamatra Faragó Andor garasát Ausztráliában? Mint mondottam, az államoknak nagy az önállóságuk és elképzelhetetlen volt, hogy egy egész Ausztráliára kiterjedő középiskolai matematikai lapot indítsunk (ez még ma is igen nehéz volna), de 1962-ben végre megindult az első ilyen lap Adelaide-ban (Dél–Ausztráliában). Ugyan-akkor (jobban mondva 1963-ban) megrendeztük az első középiskolai matematikai versenyt is. Egyidejűleg Sydney-ben is megrendezésre került az első matematikai verseny (oda ugyanabban az évben kerültem Adelaide-ből) s néhány évvel később a New South Wales-i egyetem matematikai szakosztálya megindította a „Parabolá”-t, a mi matematikai lapunkat. Később több állam csatlakozott a megmozduláshoz, s most úgyszólván minden államnak van saját középiskolai matematikai lapja és versenyeket is tartanak. Lehet, hogy jövőre Ausztrália is küld csapatot a matematikai olimpiára, bár ennek vannak bizonyos nehézségei, mivelhogy mi a „rossz” féltekén élünk és a nyári szünet az európai tél közepére esik.

Az ausztráliai középiskolai lapok nagyjából magyar mintára készülnek, de egy lényeges különbséggel: egy–egy feladatra jóval kevesebb megoldás érkezik, mint itthon. Ennek oka nem az, hogy kevesebb jó matematikus diák van Ausztráliában, hanem részben az államok szétszóródottságából és részben a tradíció hiányából ered. Talán majd ha a „Parabola” is 80 éves múltra tud visszatekinteni (és ha Ausztrália megtalálja a maga Rátz Lászlóját és Faragó Andorját) a megoldók száma ott is el fogja érni az itteni nagyságrendet.

Befejezésül hadd említsem az idei (1980. évi) sidneyi versenyfeladatokat, melyeket nemrég kaptam kézhez. Néhány megjegyzést szeretnék előrebocsátani. A verseny két fokozaton folyik; „junior” 16 éven aluliak számára (kb. az Arany Dániel versenynek felel meg) és „senior”, bármely középiskolás számára. Ellentétben a „Parabola” feladatmegoldóinak kis számával, a versenyen igen sokan (kb. kétezren) jelennek meg, de persze csak kis százalékuk dolgozik sikeresen. A magyar versenyzőknek talán feltűnik, hogy mennyivel több feladatot tűzünk ki, mint az itteni versenyeken. Ez csak azt jelenti, hogy a választék nagyobb, s még a legjobbaktól sem várunk többet két–három feladat megoldásánál. Előfordult már, hogy a nyertes minden feladatot megoldott, de ez ritkaság.

Azt is észre fogják venni a Lapok olvasói, hogy néhány feladatot a Lapokból „kölcsönöztünk”, rendszerint némi átfogalmazás után. Ez nem ritkaság, de örömmel tapasztaltam, hogy egy–két alkalommal Parabola feladatok is megtalálták útjukat a Középiskolai Matematikai Lapokba.

Íme a feladatok:

Junior fokozat

1. Árpád kijelenti, hogy idei (1980. évi) születésnapján életkora azonos a születési éve számjegyeinek összegével. Melyik évben született Árpád?

Béla azt állítja, hogy az ő 1985-beli születésnapján az ő kora is azonos lesz a születése éve számjegyeinek összegével. Bizonyítsuk be, hogy ez lehetetlen.

Találjuk meg a 20. század minden évét, mely olyan, ebből a szempontból, mint 1985.

2. Egy négyjegyű szám és a négyzete ugyanazon négy számjegyben végződik (ugyanazon sorrendben). Határozzuk meg a számot.

3. Bármely két x és y számra a $\circ$-rel jelölt művelet meghatároz egy $x \circ y$ számot. A műveletre a következő szabályok érvényesek:

(i) $0 \circ x = x$ minden x-re,

(ii) $(x \circ y) \circ z = z \circ (xy) + x \circ z + y \circ z - 2z$ minden x, y, z-re.

Számoljuk ki $8 \circ 9$-et!

4. Egy bizonyos 8 számjegyű szám osztható 101-gyel. Bizonyítsuk be, hogy ha az utolsó számjegyet első helyre mozdítjuk, az új szám ismét osztható 101-gyel.

5. Az ABC derékszögű háromszög átfogója BC és B-nél levő szöge $30°$. Legyen S a háromszögbe írt kör középpontja és D a BC oldal felezőpontja. Mutassuk meg, hogy $AS = DS$.

6. Egy papírdarabot ismételten hajtogatunk, a jobb felét a bal fölé. Mikor a papírlapot kinyitjuk, völgyek és gerincek sorozatát kapjuk. Jelöljük a völgyeket 1-gyel, a gerinceket 0-val. Például egyetlen hajlítás esetén a sorozat egyetlen 1 tagból áll, két hajlítás esetén a sorozat 110, három hajlítás esetén 110 11 00, és így tovább.

Igazoljuk, hogy minden újabb hajtogatás egy olyan hosszabb sorozatot ad, melynek első fele azonos az előző lépésével.

Találjuk meg a sorozat 150., 151. és 152. tagját. Ha a hajtogatást vég nélkül folytatjuk, tartalmazhat-e a sorozat valahol négy egymás után következő 0-t?

Senior fokozat

1. Azonos a Junior 2. kérdésével.

2. n számot tetszőlegesen választunk az első 50 természetes szám $\{1, 2, \ldots, 49, 50\}$ halmazából. Mi az n szám minimális értéke, amely mellett még igaz, hogy a választott részhalmaz mindig tartalmaz két számot úgy, hogy egyik a másik háromszorosa?

3. Legyen n egy 0-tól különböző egész szám. Bizonyítsuk be, hogy n-et csak véges számú módon írhatjuk mint két négyzetszám különbségét.

Legyen a, b, c és d egész szám. Mutassuk meg, hogy az $x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$ egyenletnek akkor és csakis akkor van végtelen sok megoldása x és y egész számokban, ha $a^2 - 4b = c^2 - 4d$.

4. Tegyük fel, hogy egy háromszög három magasságának felezőpontjai egy egyenesbe esnek. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög derékszögű.

5. Azonos a Junior 6. kérdésével, megtoldva a következővel: A 16 lehetséges négyes, 0000, 0001, 0010, 0011, ..., 1111 közül melyek fordulhatnak elő a sorozatban?

6. 1000 kártyánk van 000-tól 999-ig számozva. Ezeket úgy osztjuk el 100 dobozba, 00-tól 99-ig számozva, hogy a doboz száma a kártyáéból egy számjegy eltörlésével nyerhető. Például a 123-as kártyát a 12-es, a 13-as vagy a 23-as dobozba tehetjük.

Bizonyítsuk be, hogy a kártyákat ezen szabály szerint már 50 dobozba is el lehet osztani, de 50-nél kevesebbe nem.