n dobókockát egyszerre feldobva, a kapott eredmény egy olyan n tagú számsorozattal ún. rendezett szám n-essel jellemezhető, amelynek minden eleme az első hat természetes szám valamelyike. (A kockákat gondolatban, sorszámmal láttuk el, azok rendjében írjuk le a leolvasott számokat.) Az összes ilyen eredményt egyformán valószínűnek tekintve, a következőképpen okoskodhatunk: az összes esetek száma 6^n, hiszen 6 elem n-ed osztályú ismétléses variációiról van szó. A kedvező esetek száma $n \cdot 5^{n-1}$, ugyanis ha egy, a kedvező esetekhez tartozó számsorozat első eleme 6-os, akkor a többi az 1, 2, 3, 4, 5 számok valamelyike, azaz 5 elem egy $(n-1)$-ed osztályú ismétléses variációja, és ugyanez igaz akkor is, ha a sorozat második, ..., n-edik eleme az egyetlen 6-os. Ennélfogva a keresett valószínűség mint n függvénye

$$P(n) = \frac{n \cdot 5^{n-1}}{6^n} = \frac{n}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

Megmutatjuk, hogy a természetes számok halmazán értelmezett $P(n)$ függvénynek maximuma van az $n = 5$ és $n = 6$ esetekben. Tekintsük $P(n+1)$ és $P(n)$ hányadosát:

$$q(n) = \frac{P(n+1)}{P(n)} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5n+5}{5n+n}.$$

Látjuk, hogy $n = 5$ mellett $q(5) = 1$, vagyis a $P(5)$ és $P(6)$ valószínűségek egyenlők. Továbbá ha $n < 5$, akkor $q(n) > 1$, azaz $P(n) < P(n+1)$, végül ha $n > 5$, akkor $q(n) < 1$, tehát $P(n+1) < P(n)$. Szóban: n-nel 5-től visszafelé haladva is és 6-tól előrehaladva is egyre kisebb $P(n)$ értékeket kapunk. Ezzel bebizonyítottuk állításunkat. (Megemlíthető még, hogy $P(5)$ és $P(6)$ közös értéke $(5/6)^5 = 0{,}40187\ldots$, $P(3) = 0{,}35$, $P(10) = 0{,}32$.)

Katona Klára (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
Tarjányi Zsolt (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha $P_k(n)$ annak a valószínűsége, hogy pontosan k dobás 6-os, n közül, akkor

$$P_k(n) = \binom{n}{k} \frac{5^{n-k}}{6^n},$$
$$q_k(n) = \frac{P_k(n+1)}{P_k(n)} = \frac{5n+5}{5n+5+n-6k+1},$$

amiből a közölt megoldáshoz hasonlóan adódik, hogy $n = 6k-1$ és $n = 6k$ esetén maximális a valószínűség.

2. Elég sok dolgozat „nagy ágyút" használt: deriválás útján kereste meg a minden pozitív x-re kiterjesztett $6 \cdot P(x) = x \cdot (5/6)^{x-1}$ függvény maximumát: legyen röviden $5/6 = t$ (állandó), így

$$6P'(x) = t^{x-1} + xt^{x-1}(\log t) = t^{x-1}(1 + x\log t),$$

ahol „log" a természetes (e-alapú) logaritmusrendszert jelenti. A derivált csak a következő helyen tűnik el:

$$x = -\frac{1}{\log t} = \frac{1}{\log 6 - \log 5} = \frac{\lg e}{\lg 6 - \lg 5} = \frac{0{,}4343}{0{,}7782 - 0{,}6990} = 5{,}5,$$

csak itt lehet szélsőérték.

Ekkor azonban még mindig hátra van az ezt a helyet közrefogó 5 és 6 helyeken a függvény vizsgálata, valamint annak bizonyítása, hogy valóban maximum van. A második derivált még bonyolultabb, és nem nélkülözhetjük azokat a numerikus számításokat, amiket az egyszerűbb megoldásban elvégeztünk.

Tanulság: hasznos lehet – és nem szégyen – esetenként egyszerű numerikus próbákat beiktatni vizsgálatunkba.