$$1\cdot 2+3,\qquad 4\cdot 5+6,\ \ldots,\ (3k-2)(3k-1)+3k,\ \ldots \tag{1}$$

Az állítás a sorozatnak minden egyes tagjára érvényes, vagyis az *egytényezős* szorzatokra:

$$(3k-2)(3k-1)+3k=9k^2-6k+2=(3k-1)^2+1^2. \tag{2}$$

Erre tekintettel először azt bizonyítjuk általában, hogy két kéttagú négyzetösszeg szorzata írható kéttagú négyzetösszeg alakjában. Valóban:

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)&=a^2\alpha^2+b^2\beta^2\pm 2a\alpha b\beta+a^2\beta^2+b^2\alpha^2=\\ &=\begin{cases}(a\alpha+b\beta)^2+(a\beta-b\alpha)^2,\\ (a\alpha-b\beta)^2+(a\beta+b\alpha)^2,\end{cases}\end{aligned} \tag{3}$$

vagyis a kívánt előállítás általában 2-féleképpen is lehetséges. Ehhez sorozatunk esetében már csak két dolgot kell hozzátennünk:

Mivel a,b,α,β szerepére egész számokat gondolunk, azért a (3) eredmények mindnégy zárójeles kifejezése egész szám.

Mivel $A\cdot B\cdot C=(A\cdot B)\cdot C$, azért megállapításunk a sorozat akárhány elemének szorzatára érvényes.

Megjegyzések. 1. Mivel a 0 is egész szám, azért gondolhatunk arra is, hogy a szóban forgó szorzat esetleg maga egy négyzetszám. Ez adódik mindjárt, ha a sorozat egy elemét önmagával szorozzuk, amit a feladat nem zár ki. Megmutatjuk ezért, hogy ha az (1) sorozat két *különböző* elemét szorozzuk össze, akkor a (2)-re támaszkodó (3) előállítások alapjai közt nincs 0.

A (2) előállítás szerint számaink a^2+1 alakúak, ezért $b=\beta=1$ esetére (3) így alakul:

$$(a^2+1)(\alpha^2+1)=(a\alpha+1)^2+(a-\alpha)^2=(a\alpha-1)^2+(a+\alpha)^2,$$

ámde különböző elemeket véve $a-\alpha\neq 0$ és $a\alpha-1\neq 0$ (hiszen elég nem negatív számokra gondolni a,b,α,β szerepében).

2. A (3) alatti két előállításból tulajdonképpen elég lenne csak az egyiket felírni, hiszen α és β fölcserélésével (vagy a és b cseréjével) egymásba mennek át, ami viszont a bal oldalt nem változtatja meg. Csak az emberi figyelem természetére gondolva írtuk ki: a tetszetős azonosság szemlélete közben megfeledkezünk, hogy a bal oldal tényezőire alkalmazható a kommutatív törvény. Az egyezően kiejtett latin és görög betűk nem hoznak létre megfeleltetést a két négyzetösszeg tagjai között.

3. Vannak az (1) sorozatnak olyan elemei, amelyek (2)-től különböző módon is írhatók négyzet összegként: $7\cdot 8+9=65=8^2+1^2=7^2+4^2$, $16\cdot 17+18=290=17^2+1^2=13^2+11^2$, az utóbbi alakokra természetesen nem érvényes előbbi állításunk. Ezek magyarázata a $65=5\cdot 13$ és $290=2\cdot 145$ előállítás, ahol 13, 2 és 145 nem tagjai sorozatunknak, de $13=3^2+2^2, 2=1^2+1^2$, $145=12^2+1$, és így (3) alkalmazható, sőt fennáll $145=5\cdot 29=(2^2+1^2)(5^2+2^2)$ is. Az érdeklődők számos további érdekességet találhatnak.

4. A sorozatunk elemeiből képzett szorzatok kéttagú négyzetösszeg felbontásainak számára a fentiek szerint az sejthető, hogy legalább 2^{n-1}, ahol n az összeszorzott elemek száma. Ajánljuk az érdeklődőknek megvizsgálásra pl. az $5\cdot 26\cdot 65$ szorzatot.