A televízióban népszerű a *Kapcsoltam* című játék. Örvendetes, hogy a műsorban a lexikális tudást vagy nyelvi ügyességet kívánó feladatok mellett helyet kaptak kimondottan logikai vagy matematikai problémák is. Ezek közül néhányat veszünk itt szemügyre. Ott három perc alatt nem volt megkövetelhető a teljes megoldás, itt talán három percnél több időnk van arra, hogy *teljes megoldásra törekedjünk* vagy *más magyarázatot adjunk* a megoldásra, mint ami ott elhangzott.

I.

Az egyik feladat így szólt: hogyan lehetne folytatni egy-egy taggal a

$$16,\quad 15,\quad 17,\quad 14,\ \dots$$
$$32,\quad 33,\quad 31,\quad 34,\dots$$

sorozatokat?

A megoldás és indoklás így szólt: fölül 18, alul 30 következik, mert „két, egymás alatti szám összege mindig 48”.

Egyrészt ez kevés, mert nem indokolja, hogy pl. fönt miért 18 következik. (Nyilván a műsoridő rövidségének tulajdonítható, hogy a választ részletesebb indoklás nélkül elfogadták.)

Másrészt viszont a két sorozat *egymástól függetlenül is* folytatható. Pl. a felső sorozatban minden páratlan sorszámú tag a kettővel előbbi taghoz viszonyítva 1-gyel nő:

(1) $$a_{2n+1} = a_{2n-1} + 1,$$

minden páros indexű tag 1-gyel kisebb a kettővel előbbi tagnál:

(2) $$a_{2n} = a_{2n-2} - 1.$$

A feladat szerint

(3) $$a_1 = 16, \qquad a_2 = 15.$$

Ugyanígy az alsó $\{b_i\}$ sorozatra:

(4) $$b_{2n+1} = b_{2n-1} - 1,$$
(5) $$b_{2n} = b_{2n-2} + 1.$$

A feladat szerint

(6) $$b_1 = 32, \qquad b_2 = 33.$$

Persze, nem állítható, hogy a két sorozat csak így folytatható, ez *egy* lehetséges megoldás.

További feladatokat mi magunk is kitalálhatunk a fenti $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ sorozattal kapcsolatban. Oldja meg őket az olvasó!

Például:

1. feladat. Mutassuk meg, hogy az (1)–(2)–(3)–(4)–(5)–(6) alatt definiált sorozatokban

$$a_i + b_i = 48 \text{ (minden } i \text{ természetes számra).}$$

2. feladat. Számítsuk ki $a_{1\,000\,000}$ értékét !

3. feladat. Vonjuk össze az (1)–(2), illetve (4)–(5) képzési szabályokat egyetlen összefüggésbe!

4. feladat. Adható-e zárt formula az a_n, b_n sorozatok tagjaira?

II.

Egy másik kérdés: Bergengóciában 10 arany egy tehén, 3 arany egy juh, 1/2 arany egy malac ára. 100 aranyam van. Hogyan vásárolhatok ebből 100 állatot?

A megoldás így hangzott:

	94	malac	47	arany
	1	juh	3	arany
	5	tehén	50	arany
Összesen:	100	állat	100	arany

Biztos, hogy csak ez a megoldás ?

Legyen t a megvásárlandó tehenek, j a juhok, m a malacok száma.

Az állatok száma 100:

$$t + j + m = 100,$$

a fizetendő aranyak száma is 100:

$$10t + 3j + 0{,}5m = 100.$$

Ennek a háromismeretlenes egyenletrendszernek keressük a megoldásait a nem negatív egészek körében. Szorozzuk meg a második egyenletet 2-vel, és vonjuk ki az így kapott egyenletből az elsőt:

$$19t + 5j = 100.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$j = 20 - 3t - \frac{4t}{5}.$$

Mivel j, 20, $3t$ egészek, kell, hogy $\frac{4t}{5}$ is egész legyen, azaz

$$t = 5k \quad (k \text{ nem-negatív egész}).$$

Így

$$j = 20 - 19k,$$
$$m = 80 + 14k.$$

Itt k csak olyan nem-negatív egész lehet, hogy $20 - 19k \geqq 0$ legyen, vagyis

$$k \leqq \frac{20}{19}\,.$$

Így k lehetséges értékei 0 vagy 1. A lehetséges bevásárlás tehát:

	$k = 1$	$k = 0$
$t = 5k$	$t = 5$	$t = 0$
$j = 20 - 19k$	$j = 1$	$j = 20$
$m = 80 + 14k$	$m = 94$	$m = 80$

Lehetséges persze, hogy Bergengócia piacügyi minisztere a második megoldás ellen tiltakozni fog, mert szereti a tehéntejet. De matematikailag a második is megoldás.

5. feladat. Lesz-e további megoldása a feladatnak, ha negatív számú tehenet, juhot és malacot is megengedünk (vagyis mi is adhatunk tehenet, juhot és malacot)?

III.

Mondjunk olyan számot, amely 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal osztva 1 maradékot, 11-gyel osztva 0 maradékot ad.

A játékpartner 3 percen belül meg is adott egy megoldást: 121.

A feladatnak azonban sok más megoldása is van. Próbáljuk ezeket megkeresni.

Keressünk először olyan számot, amely 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal egyaránt osztható. Ezek közül a legkisebb $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 60$. Ez azonban 11-gyel osztva 5 maradékot ad, az 1-gyel nagyobb szám, 61 pedig 6 maradékot.

60 többszörösei közt kell tovább keresnünk. $2 \cdot 60 = 120$ 11-gyel osztva 10 maradékot ad, tehát 121 *a legkisebb, a feltételeknek megfelelő természetes szám.*

Vegyük most 60-nak a többszöröseit, figyeljük meg a 11-gyel való osztás maradékát:

Szám	120	240	360	480	600	720	840	960	1080	1200	1320	1440
: 11 maradék	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	**10**

Szám	60	180	300	420	540	660	780	900	1020	1140	1260	1380	1500
: 11 maradék	5	4	3	2	1	0	**10**	9	8	7	6	5	4

A maradékok egymásutánjának szabályossága (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 10, 9, ...) nem véletlen, annak következménye, hogy

ha 60 öt maradékot ad 11-gyel osztva, $2 \cdot 60$ tízet,

$4 \cdot 60 = 240$ ugyanannyit, mint $4 \cdot 5 = 20$, vagyis 9-et,

$6 \cdot 60 = 360$ ugyanannyit, mint $6 \cdot 5 = 30$, vagyis 8-at és így tovább.

Bennünket azok a számok érdekelnek, amelyek 11-gyel osztva 10 maradékot adnak. Ezek 120, 780, 1440, 2100, 2760 stb. (mindig $660 = 11 \cdot 60$-nal növekedik).

Azok a természetes számok tehát, amelyek 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal osztva 1 maradékot, 11-gyel osztva 0 maradékot adnak, a

$$120 + k \cdot 660 + 1$$

alakú számok (k természetes szám).

Világos, hogy ezek megoldásai a feladatnak: $120+k\cdot 660$, ha 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel vagy 6-tal osztjuk 0 maradékot ad; $k \cdot 660$ 11-gyel osztható, $120 + 1$ szintén.

A fenti gondolatmenetből az is kitűnik, hogy *csak ezek a számok a feladat megoldásai a természetes számok körében.* Ezek tehát

$$121,\ 781,\ 1441,\ 2101,\ 2761,\ \ldots$$

6. feladat. Lesz-e ebben a sorozatban 13-mal is osztható szám?

*

Nem állítjuk, hogy mindez 3 perc alatt, telefon és tévé mellett végiggondolható. A tévéműsoron enélkül is jól szórakoztunk.

Kérjük, akinek hasonló ötletei támadnak a műsor nyomán, írja meg nekünk.