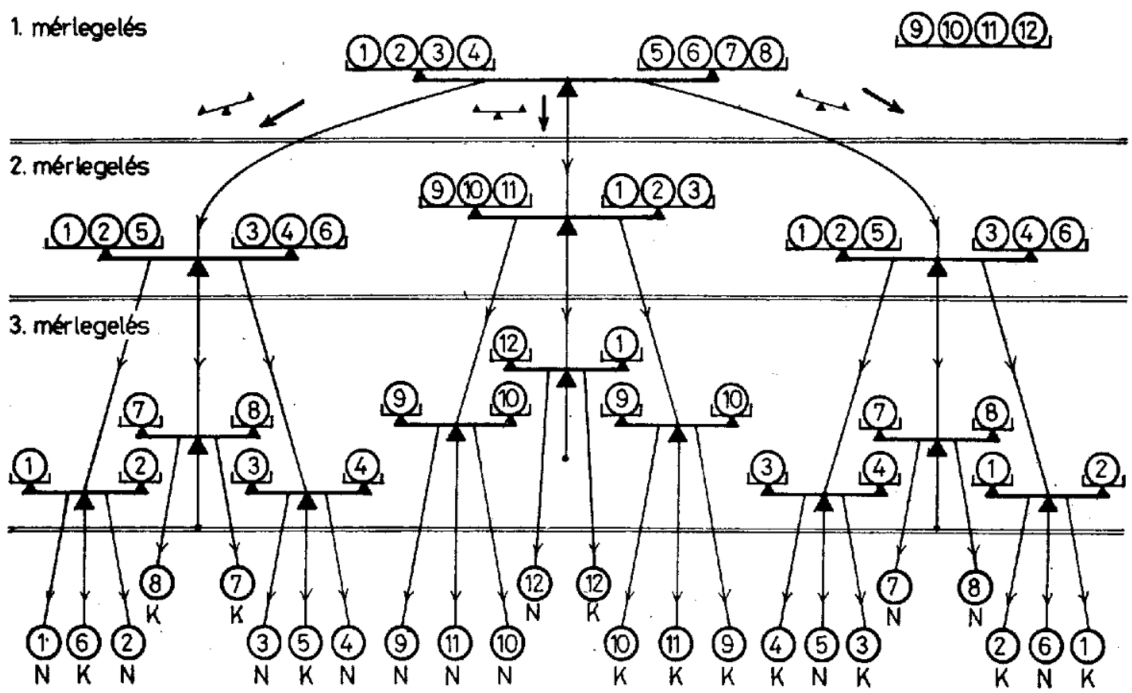
Képzelje el az olvasó, hogy az asztalon egy halom, külsőre teljesen egyforma pénzdarab van. Valaki elárulta, hogy az egyik érme hamis, de ez a valódi érméktől csak súlyban tér el. Még azt se tudjuk, hogy a hamis érme könnyebb-e vagy éppen nehezebb a többinél. Rendelkezésünkre áll egy egyenlő karú mérleg, súlyok nélkül. Hogyan használjuk a mérleget, ha minimális számú méréssel szeretnénk a hamis érmét kiválasztani, és azt is meg akarjuk közben tudni, hogy az nehezebb-e vagy sem a többinél?

Olvasóink közül bizonyára sokan megoldották ezt a feladatot 12 érmére. Az 1. ábrán egy lehetséges megoldás látható. Az első mérés három kimenetének megfelelően a második méréshez három különböző módon osztjuk szét az érméket. A bal oldali nyíl annak az esetnek felel meg, amikor a bal oldali serpenyő süllyed le, a középső nyíl az egyensúlynak, a jobb oldali pedig annak az esetnek, amikor a jobb oldali serpenyő a nehezebb. Hasonló módon ábrázoltuk a harmadik mérésre vonatkozó kilenc felosztást. (Az ábrán az érméket megszámoztuk, a K és N betűk azt jelzik, hogy a hamis érme könnyebb vagy nehezebb a többinél.) Ennek a megoldásnak jellemző tulajdonsága, hogy a soron következő méréshez az érmék felosztása függ az előző mérés eredményétől.



1. ábra

Most a feladatot általános formában mondjuk ki:

Adott $m \geqq 3$, külsőre teljesen egyforma érme. Mindegyik érme, egy kivételével, ugyanolyan súlyú, arról az egyről, amelyik súlyban különbözik a többitől, nem ismert, hogy súlya melyik irányban tér el. Legkevesebb hány méréssel lehet egy egyenlő karú mérleggel ezt az érmét megtalálni és megállapítani a típusát?[1]

Ez a feladat több mint 30 évvel ezelőtt sok, főleg angol és amerikai matematikus figyelmét vonta magára. 1945-ben a „The matematical Gazette" című angol folyóiratban megjelent a feladatnak egy megoldása. Szerzője *R. L. Goodstein*, aki később a matematikai logika ismert szakemberévé vált.

Goodstein módszert adott a hamis érmének és típusának meghatározására n méréssel, ha az érmék száma $m \leq \frac{1}{2}(3^n - 2n + 3)$. (Vegyük észre, hogy $n = 3$-ra $m \leq 12$.) Azonban kiderült, hogy $n > 3$-ra eredménye nem a lehető legjobb: n méréssel $m \leq \frac{1}{2}(3^n - 3)$ érméből is ki lehet választani a hamisat, és meg lehet határozni a típusát. Ezt egymástól függetlenül több matematikus is megtalálta, és 1946-ban ugyanez a folyóirat egy meglehetősen hosszú listában közölte a megoldók nevét és a különböző eredményeket, melyeket a hamis érmék utáni nyomozás terén értek el. Ugyanebben a számban jelent meg a lehető legjobb megoldás, *F. J. Dyson* tollából, akiből később ismert elméleti fizikus lett.

Dyson ötlete a hármas számrendszer felhasználásán alapszik. Minden érmét egy ügyesen megválasztott hármas számrendszerbeli számmal jelöl meg, és ezzel egy csapásra lehetővé teszi a méréssorozat tervezését és kiértékelését. Ennek a megoldásnak különös szépsége abban rejlik, hogy a soron következő méréshez kiválasztott érmék nem függnek az előző mérések eredményétől.

Az elmúlt pár évben ennek a feladatnak több új megoldása is megjelent, de közben Dyson módszerét érdemtelenül elfeledték. Ezért érdemes erről részletesebben szólnunk. Dyson megoldását két lépésben ismertetjük, először az $m = (3^n - 3)/2$ esetet, majd az $m < (3^n - 3)/2$ esetet vizsgálva.

[1]Nyilvánvaló, hogy az $m < 3$ értékekre a feladat nem megoldható, hiszen $m = 1$-re az érme hamis, de ismeretlen típusú; $m = 2$-re az érmék különböző súlyúak, és közülük a hamisat lehetetlen ilyen méréssel kiválasztani.

Első rész. Legyen az érmék száma $m = \frac{1}{2}(3^n - 3)$. Tekintsük az összes n jegyű (0, 1 és 2 számjegyekből álló) triadikus számokat: $00\dots00$, $00\dots01, \dots,$ $22\dots22$. Ezek száma 3^n. Ezeket használjuk fel az érmék megjelölésére a következő módon. Minden számot felhasználunk jelként, kivéve azt a hármat, amelyik csupa egyforma számjegyből áll: $00\dots0$, $1\dots1$, $2\dots2$.

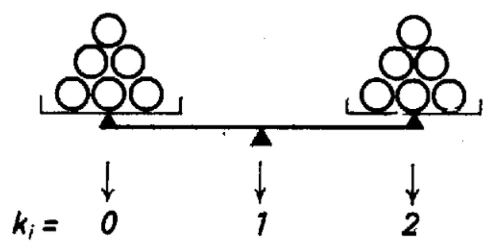
A jeleket párokba állítjuk: egy pár két komplementer jelből áll, azaz azokból, amelyekben a sorrendben megfelelő számjegyek összege 2 (más szavakkal komplementer jelek azok, amelyek összege $22\dots22$.

Egy jelet *jobb oldalinak* nevezünk, ha benne a balról számított első két nem egyforma jegy, 01, 12 vagy 20. Ellenkező esetben a jelet *bal oldalinak* nevezzük. Világos, hogy minden, komplementer jelekből álló pár egyik eleme jobb oldali, a másik bal oldali.

Érme sorszáma	Jobb oldali jel	Bal oldali jel
1	011	211
2	122	100
3	200	022
4	010	212
5	121	101
6	202	020
7	012	210
8	120	102
9	201	021
10	001	221
11	112	110
12	220	002

Vegyük észre, hogy a jelpárok száma éppen megegyezik az érmék m számával. Számozzuk meg az érméket 1-től m-ig, és feleltessünk meg minden érmének egy jelpárt. Például 12 érmét a táblázatban látható módon lehet „megjelölni”.

Legyen $M(i, 0)$, $M(i, 1)$, illetve $M(i, 2)$ mindazoknak az érméknek a halmaza, amelyek jobb oldali jelében az i-edik helyen 0, 1, illetve 2 áll. Könnyű belátni, hogy az $M(i, 0)$, $M(i, 1)$ és $M(i, 2)$ halmazokban egyforma sok elem van, és hogy a halmazoknak nincs közös elemük (lásd például az 1. táblázatot). Ezek után az érméket – Dyson szerint – a következőképpen kell mérnünk. Összesen n egymást követő mérést végzünk. Az i-edik méréshez ($i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$) a bal oldali serpenyőbe tesszük az $M(i,\ 0)$ halmazban levő érméket, a jobb oldali serpenyőbe pedig az $M(i,\ 2)$ halmazbeli érméket. Egy mérés eredményét 0-val jelöljük, ha a bal oldali serpenyő a súlyosabb, 1-gyel, ha a serpenyők egyenlő súlyúak, és 2-vel, ha a jobb oldali serpenyő a nehezebb (lásd a 2. ábrát). Az i-edik mérés eredményét k_i-vel jelöljük. A $k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n$ számjegyekből elkészítjük $k = k_1, k_2,\ \dots,\ k_n$ jelet. [2]



2. ábra

Állítjuk, hogy k a hamis F érme jele, mégpedig, ha k jobb oldali jel, akkor F könnyebb a többinél, és ha k bal oldali jel, akkor F nehezebb a többi érménél. Valóban, nézzük, mi történik, amikor végrehajtjuk az i-edik mérést. A mérés eredményeképpen a serpenyők vagy egyensúlyban vannak, vagy valamelyik nehezebb.

Ha a serpenyők egyensúlyban vannak, a hamis érme egyikben sincs, következésképpen az $M(i,\ 1)$ halmazban van. De ebből következik, hogy a bal oldali (és a jobb oldali) jelében az i-edik helyen 1 áll, amit a mérés eredménye, $k_i = 1$ is mutat.

Ha valamelyik serpenyő lesüllyed, a hamis érme az egyik serpenyőben van. Tegyük fel például, hogy, a jobb oldali serpenyő a nehezebb, azaz $k_i = 2$. Ez az eredmény kétféleképpen következhet be:

– a hamis érme a jobb oldali serpenyőben van (és ekkor nehezebb a többinél), azaz az $M(i,\ 2)$ halmazba esik, a jobb oldali jelében az i-edik helyen 2-es áll. Tehát a mérés eredménye megegyezik a jobb oldali jelének i-edik jegyével;

– a hamis érme a bal oldali serpenyőben van, és ekkor könnyebb a többinél, azaz az $M(i,\ 0)$ halmazba esik. Tehát a jobb oldali jelének i-edik jegye 0, és a mérés eredménye megegyezik a bal oldali jelének i-edik jegyével.

Teljesen hasonló a „szimmetrikus” eset, amikor a bal oldali serpenyő a nehezebb ($k_i = 0$).

Így valóban a méréssorozat eredményéből adódó $k = k_1,\ k_2,\ \dots,\ k_n$ jel a hamis érme jele, éspedig nehezebb érme esetén a jobb oldali, könnyebb érme esetén a bal oldali jel, amit bizonyítanunk kellett.

[2]Bizonyítsuk be, hogy ez valóban jel, azaz $k_1,\ \dots,\ k_n$ nem mind egyforma.

Érdemes megjegyezni, hogy a hamis érme típusát rendszerint az összes mérés elvégzése előtt megkapjuk – amint a k jel összeállításában két különböző számjegyet kapunk.

A leírt módszer fontos jellemzője – ahogyan azt korábban már említettük –, az a körülmény, hogy a mérésekhez kiválasztott érmék nem függenek a megelőző mérések eredményétől. Például 12 érme esetén, melyeket a táblázatnak megfelelően jelöltünk meg, elegendő a következő három mérést elvégezni: $(1,\ 4,\ 7,\ 10)-(3,\ 6,\ 9,\ 12)$, $(3,\ 6,\ 9,\ 10)-(2,\ 5,18,\ 12)$, $(3,\ 4,\ 8,\ 12)-(2,\ 6,\ 7,\ 11)$.

Második rész. Röviden vázoljuk Dyson módszerét az $m<\frac{1}{2}(3^n-3)$ esetre. Ha ebben az esetben az érmékhez megfelelő módon tudunk jeleket rendelni, akkor az $M(i,\,0)$ és $M(i,\,2)$ halmazokban egyforma sok érmének kell lennie. Ezért a következőket tesszük. Osszuk a jeleket hatos csoportokba: egy csoportba azok a jobb oldali jelek tartozzanak, amelyek egymásból a jelek ciklikus cseréjével $(0-1,\ 1-2,\ 2-0)$ kaphatók, a baloldali párjukkal együtt.

Minden csoportba három jobb oldali és három baloldali jel tartozik. Azt a csoportot, amely a $00\ldots01$, $11\ldots12$ és a $22\ldots20$ jobb oldali jeleket tartalmazza, különlegesen kezeljük. Osszuk az érméket hármas csoportokba mindaddig, amíg ez lehetséges, és adjunk nekik jeleket a következő módon. Egy csoportba tartozó érméknek egy csoportba tartozó jelpárokat adjunk, a maradéknak pedig – ha egyáltalán volt – a különleges csoportból rendeljünk jelpárokat. Ha egy érme maradt ki, akkor az $11\ldots12$ jobb oldali jelet kapja, ha kettő, akkor a $00\ldots01$ és a $22\ldots20$ jobb oldali jeleket kapják (és a megfelelő bal oldaliakat is).

Ezekkel a jelekkel az első $n-1$ mérés a régi módszer szerint végezhető. Azt, hogy az utolsó mérés mi legyen, mindenki önállóan kigondolhatja.

Ezzel Dyson módszerét leírtuk. Most megmutatjuk, hogy ez, meghatározott értelemben, a lehető legjobb. Pontosabban szólva megmutatjuk, hogy ha m érme közül n méréssel ki tudjuk választani a hamisat, és meg tudjuk mondani a típusát, akkor $2m\le 3^n-3$ (Természetesen nem vesszük figyelembe a „szerencsés” eseteket: tetszőleges számú érme közül már két méréssel megkaphatjuk a hamisat.)

Számozzuk meg az érméket az 1-től m-ig terjedő számokkal, és készítsünk elő $2m$ papírlapot. Írjuk ezekre az összes lehetséges esetet: az egyes érme könnyebb, az egyes érme nehezebb, a kettes érme könnyebb stb. Világos, hogy ehhez mind a $2m$ papírlapot felhasználtuk, és egyetlen eset sem maradt ki. Jelöljük, ahogyan azt korábban tettük, egy mérés eredményét a 0, 1 vagy 2 számjeggyel. Mindegyik mérés azt adja meg, hogy az elképzelhető esetek egyik része nem jöhet elő, míg másik része továbbra is gyanús marad. Nézzük az első mérést. Anélkül, hogy azt valóban végrehajtanánk, írjuk mindegyik lapra az első mérés végeredményét, feltéve, hogy a papírlapon áll a gyanúsított. Világos, hogy minden papírlapra a 0, 1, 2 számjegyek közül pontosan az egyik kerül. Ily módon a papírlapokat három csoportra osztottuk. Tehát a legnagyobb elemszámú csoportban legalább $2m/3$ lap van. Következésképp bárhogy is szerveztük meg az első mérést, előfordulhat, hogy utána még legalább $2m/3$ lap tartalmaz gyanúsítható esetet.

Hasonló módon a második mérés a gyanúsítottaknak ezt a csoportját három részcsoportra osztja. Ezért közülük a legnagyobb elemszámú legalább $2m/9$ lapot tartalmaz. Pontosan ugyanígy, n mérés után $2m/3^n$ gyanús papírlapot kaphatunk az egyik csoportban. Tehát ha $2m/3^n>1$, akkor a hamis érmét és típusát általában n méréssel nem lehet megállapítani. Ezért ha n mérés elegendő, akkor $2m\le 3^n$.

De ezzel még nem vagyunk készen! Még nem vizsgáltuk meg a $2m=3^n-1$ esetet ($2m$ páros szám, tehát nem egyenlő sem $(3n-2)$-vel, sem 3^n-nel). Erre a fönti meggondolás nem elegendő. Fordítsunk egy kicsit több figyelmet az első mérésre. Világos, hogy ugyanannyi papírlapra kerül a 0 számjegy, mint ahányra a 2 számjegy. Legyen ezek száma külön-külön p, ebből adódik, hogy $2m-2p$ lapra kerül 1-es.

Figyeljük meg, hogy p páros szám. Valóban, ha a bal és jobb oldali serpenyőbe is k érme került, akkor $p=2k$. Ha akár p, akár $(2m-2p)$ nagyobb, mint 3^{n-1}, akkor a keresett papírlap meghatározásához a megmaradt $(n-1)$ mérés nem feltétlenül lesz elegendő. Ha pedig $p=2k\le 3^{n-1}$ és $2m-2p\le 3^{n-1}$, akkor, mivel 3^{n-1} páratlan, $p\leqq 3^{n-1}-1$, és $2m-2p\leqq 3^{n-1}-1$. Tehát $2m=(2m-2p)+2p\leqq 3^{n-1}-1+2(3^{n-1}-1)=3^n-3$, így ha n mérés elegendő, akkor $2m\leqq 3^n-3$.