**Megoldás.** *a)* Legyen a (2) alakban előállítandó $n$-ed fokú polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k + \ldots + a_nx^n, \tag{3}$$

ahol $a_n \neq 0$, és az $a_k$ együtthatók ($k = 0, 1, \ldots, n$) valós számok. Elég bizonyítani az állítást az $x^k$ hatványokra ($k = 1, 2, \ldots, n$), „egytagú" polinomokra, mert ebből következik az $a_kx^k$-ra is, valamint az ilyen előállításoknak és az $a_0$ számnak (3) összegére is, hiszen polinom konstansszorosa, valamint polinomok összege is polinom. Azt akarjuk tehát belátni, hogy minden $k = 1, 2, \ldots, n$-hez vannak olyan $c_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) valós számok, amelyekkel

$$x^k = c_kx^{(k)} + c_{k-1}x^{(k-1)} + \ldots + c_1x^{(1)}. \tag{4}$$

Természetesen látjuk, hogy minden $x^{(k)}$ maga is polinom.

Teljes indukcióval bizonyítunk.

$$k = 1\text{-re} \quad x^{(1)} = x, \quad \text{azaz} \quad x = x^{(1)}.$$

$k = 2$-re

$$x^{(2)} = \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

amiből

$$x^2 = 2x^{(2)} + x = 2x^{(2)} + x^{(1)},$$

az állítás helyes. Föltéve mármost, hogy valamely $k$ természetes számról már tudjuk, hogy az $i = 1, 2, \ldots, k-1$ számok mindegyikére $x^i$ előállítható $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(i)}$-ből a (2) alakban, ezeket a kifejezéseket behelyettesítve $x^k$-nak az

$$x^{(k)} = \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

-ból adódó

$$x^k = k!\cdot x^{(k)} + d_{k-1}x^{k-1} + \ldots + d_1x$$

kifejezésébe, ahol – mint látjuk – $d_{k-1}, d_{k-2}, \ldots, d_1$ egész számok, a kívánt (4)-et kapjuk. Ezzel a feladat első állítását bebizonyítottuk.

*b)* Megmutatjuk, hogy ha $x$ egész szám, akkor minden (egész) $n$-re $x^{(n)}$ egész szám. Valóban

$$\text{ha még } 0 \leqq x < n, \text{ akkor } x - n + 1 \leqq 0, \text{ tehát } x^{(n)}$$

számlálójában előfordul a 0 tényező, és emiatt $x^{(n)} = 0$, egész szám;

ha $x \geqq n$, akkor $x^{(n)} = \binom{x}{n}$;

ha pedig $x < 0$, akkor a számláló minden egyes tényezőjéből $(-1)$-et kiemelve, a maradó tényezők $(-x)$-től egyesével nőnek $(-x+n-1)$-ig, és ezért,

$$x^{(n)} = (-1)^n\binom{n-x-1}{n} \quad \big[\text{és itt } (-x-1) \geqq 0\big];$$

márpedig a binomiális együtthatók egész számok.[1] Eszerint ha a (3) polinom (2) átalakításában minden $b_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) egész, akkor minden egész $x$ helyen $p_n(x)$ egész szám.

Fordítva azt kell megmutatnunk, hogy ha $p_n(x)$ minden egész helyen egész értéket vesz fel, akkor (2) átalakításában minden $b_i$ egész szám. Valóban

$p_n(0)$ a föltevés szerint egész, másrészt az átalakításból $p_n(0) = b_0$, tehát $b_0$ egész;

$p_n(1)$ egész, másrészt $p_n(1) = b_0 + b_1$ ugyanis $k = 2, 3, \ldots, n$ mellett $x^{(k)}$ tartalmazza az $(x-1)$ tényezőt –, ennélfogva $b_1$ is egész;

$p_n(2)$ egész, másrészt $p_n(2) = b_0 + b_1 + \binom{2}{1} + b_2\binom{2}{2} = b_0 + 2b_1 + b_2$, ugyanis $k = 3, \ldots, n$ mellett $x^{(k)}$ tartalmazza az $(x-2)$ tényezőt; így pedig $b_2$ is egész.

És ha már a $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}$ ($i \leqq n$) együtthatókról így egymás után beláttuk, hogy egészek, akkor $b_i$ egész volta abból következik, hogy a föltevés szerint

$$p_n(i) = b_0 + b_1\binom{i}{1} + b_2\binom{i}{2} + \ldots + b_{i-1}\binom{i}{i-1} + b_i\binom{i}{i}$$

egész, és itt $b_i$ együtthatója 1. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*Balla Láaszló* (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o. t.)

[1] Lásd pl. a következő cikkünkben: *Pólya György*: Gauss-féle binomiális együtthatók, I. rész., K. M. L. 45. (1972) 97–102. old., pontosabban a 99. oldalon.

*Megjegyzések.* 1. Azt az eljárást, ahogyan a $b_i$ együtthatók egész voltát bizonyítottuk, felhasználhatjuk az *a)* részben egymás utáni kiszámításukra is (akkor is, ha nem egészek). Ekkor természetesen $p_n(0), p_n(1), p_n(2), \ldots$ értékét ki kell írnunk, mint az $a_0, a_1, \ldots, a_n$ eredeti együtthatók kifejezéseit. Pl. $n=3$ esetében

$$p_3(0) = a_0 = b_0;$$
$$p_3(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = b_0 + b_1,$$

és innen

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3;$$
$$p_3(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = b_0 + 2b_1 + b_2, \text{ innen}$$
$$b_2 = (2a_1 + 4a_2 + 8a_3) - 2(a_1 + a_2 + a_3) = 2a_2 + 6a_3;$$

végül

$$p_3(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = b_0 + 3b_1 + 3b_2 + b_3\text{-ból}$$
$$b_3 = 6a_3.$$

2. Az érkezett megoldások nagy része az *a)* rész bizonyításában járt el az előbbiek szerint. Ez csak annyiból kifogásolható, hogy nehézkes, enyhítsük így: a fenti módon a munka jelentős része megtakarítható. Jó, ha különbséget teszünk egy tétel bizonyítása és gyakorlati alkalmazása, a nyújtott lehetőség végrehajtása között.