(1) $$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2+\left(\frac{AC}{BD}\right)^2+\left(\frac{AD}{BC}\right)^2>1.$$

Azt fogjuk belátni, hogy az állítás azzal a megszorítással is igaz – amennyiben (1) két oldala közt egyenlőséget is megengedünk –, ha A helyére a BCD sík tetszés szerinti pontját írjuk. Ha ugyanis A vetülete e síkon A', akkor – valódi tetraéder, azaz nem egy síkban levő 4 csúcs esetében – $A'B<AB$ és $A'C<AC$ és $A'D<AD$, tehát A'-t írva A helyére, (1) bal oldala csökken; másrészt a BCD sík bármely pontja lehet egy $ABCD$ tetraéder negyedik csúcsának vetülete.

A háromszögeknél szokásos betűzésre áttérve ezt fogjuk tehát bizonyítani:

(2) $$\frac{PA^2}{BC^2}+\frac{PB^2}{CA^2}+\frac{PC^2}{AB^2}\geq 1,$$

ahol A, B, C egy valódi – azaz el nem fajult – háromszög csúcsai, P pedig a háromszög síkjának tetszés szerinti pontja.

Legyenek egy derékszögű koordináta-rendszerben $A(x_A,\, y_A)$, $B(x_B,\, y_B)$,
$C(x_C,\, y_C)$ és $P(u,\, v)$, továbbá legyen rövidítésül

$$\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{a^2}=\alpha,\quad \frac{1}{CA^2}=\frac{1}{b^2}=\beta,\quad \frac{1}{AB^2}=\frac{1}{c^2}=\gamma.$$

Ekkor (2) bal oldala így alakítható:

(3) $$\begin{aligned}&\alpha[(u-x_A)^2+(v-y_A)^2]+\beta[(u-x_B)^2+(v-y_B)^2]+\gamma[(u-x_C)^2+(v-y_C)^2]=\\&=(\alpha+\beta+\gamma)(u^2+v^2)-2u(\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C)-2v(\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C)+\\&+\alpha(x_A^2+y_A^2)+\beta(x_B^2+y_B^2)+\gamma(x_C^2+y_C^2)=\\&=(\alpha+\beta+\gamma)\left[\left(u-\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+\left(v-\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2\right]+\Bigg\{\alpha(x_A^2+y_A^2)+\\&+\beta(x_B^2+y_B^2)+\gamma(x_C^2+y_C^2)-\frac{(\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C)^2}{\alpha+\beta+\gamma}-\frac{(\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C)^2}{\alpha+\beta+\gamma}\Bigg\}.\end{aligned}$$

Rögzített A, B és C, valamint α, β, γ értékek mellett, P helyzetét viszont változtatva, itt csak u és v változik, vagyis a kifejezés első tagja. E tag legkisebb értéke 0, ti. akkor, ha

(4) $$u=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\quad\text{és}\quad v=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

hiszen α, β, γ pozitív számok, ezért összegük is pozitív. Így pedig állításunkhoz elég azt belátnunk, hogy (3) további – a kapcsos zárójelben álló – tagjainak összege nem kisebb 1-nél.

Ennek az összegnek az átrendezésével az α^2-et, β^2-et és γ^2-et tartalmazó tagok összege 0, az $\alpha\beta$ szorzatot tartalmazó tagok, kellő alakítással

(5) $$\frac{\alpha\beta[(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2]}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\alpha\beta\cdot AB^2}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\dfrac{\alpha\beta}{\gamma}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

A betűk szerepe szimmetrikus, a $\beta\gamma$ és a $\gamma\alpha$ szorzatot tartalmazó tagok hasonlóan alakíthatók, eszerint a (4) koordinátákkal meghatározott pontra vonatkozóan (3) értéke

$$\left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}+\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}\right):\alpha+\beta+\gamma,$$

és azt akarjuk belátni, hogy az osztandó nem kisebb az osztónál. Mivel mindkettő pozitív, elég azt belátni, hogy a különbségük pozitív vagy 0.

Ez fele a következő kifejezésnek:

$$[\alpha^2(\beta-\gamma)^2+\beta^2(\gamma-\alpha)^2+\gamma^2(\alpha-\beta)^2]:\alpha\beta\gamma,$$

ami pedig valóban nem lehet negatív, egyenlőség akkor és csakis akkor áll be, ha $\alpha=\beta=\gamma$, speciálisan ha az ABC háromszög egyenlő oldalú.

Ezzel állításunkat – és az előrebocsátottak szerint egyben a feladat állítását is – bebizonyítottuk, valódi $ABCD$ tetraéder esetében (1)-ben nem állhat egyenlőség.

Még csak azt jegyezzük meg, hogy a (4) koordinátákkal meghatározott pont mindig létezik, (3) változó részének értéke arra a pontra nézve 0, és ezért az állítás nem élesíthető, vagyis (1) jobb oldalára $(1+\varepsilon)$-t írva, ahol ε pozitív szám, már megadható olyan valódi tetraéder, melyre a módosított állítás nem érvényes.

Páles Zsolt (Sátoraljaújhely, Kossuth L. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy a (4) koordinátákkal megadott pont rajta van az AB oldalt

$$\beta : \alpha = \frac{1}{b^2} : \frac{1}{a^2}$$

arányban osztó pontot a C csúccsal összekötő egyenesen, ugyanígy a BC-t $\gamma : : \beta$ és a CA-t $\alpha : \gamma$ arányban osztó pontot a szemben levő csúccsal összekötő egyenesen. E 3 egyenes Ceva tétele alapján egy ponton megy át, ugyanis

$$\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\gamma} = 1.$$