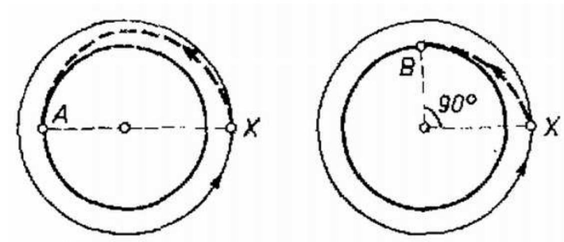
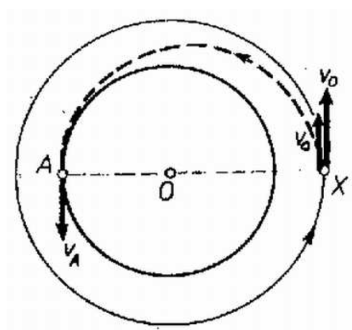
**1.** *Egy $m = 12$ t tömegű űrhajó $h = 100$ km magasságban körpályán kering a Hold körül. Abból a célból, hogy elérje a Holdat, a hajtóművet rövid időre bekapcsolják az $X$ pontban. A rakétából kiáramló gázok sebessége a rakétához képest $u = 10\,000$ m/s. A Hold sugara $R = 1700$ km, felszínén a szabadesés gyorsulása $g = 1{,}7$ m/s$^2$. Az űrhajó a megközelítést kétféleképp hajthatja végre (1. ábra), és az a kérdés, hogy a két esetben mennyi üzemanyagot fogyaszt?* a) *A Holdat az $X$ ponttal ellentétes $A$ pontbon éri el.* b) *Az $X$ pontban a Hold középpontja felé adott impulzussal elérik azt, hogy az űrhajó $B$-ben érintőlegesen éri el a Hold felszínét.*




*1. ábra*

**Megoldás.** A nehézségi gyorsulás a Hold felszínén $g = fM/R^2$ ($f$ a tömegvonzási állandó, $M$ a Hold tömege). A körpályán keringő űrhajó eredeti sebessége $v_0$, erre nézve

$$\frac{v_0^2}{R+h} = \frac{fM}{(R+h)^2} = \frac{gR^2}{(R+h)^2}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = 1652 \text{ m/s}.$$




*2. ábra*

*a)* Az űrhajó a rakéta ellenirányú működtetésével sebességét $v_0$-ról egy bizonyos $v_a$-ra csökkenti. Ezután ellipszispályán kering; az ellipszis nagytengelyének végpontjai $A$ és $X$ (2. ábra). A sebesség $A$-ban $v_A$, $X$-ben $v_a$. A területi sebesség állandósága (Kepler II. törvénye) szerint:

$$v_A R = v_a(R+h), \qquad v_A = \frac{R+h}{R} \cdot v_a;$$

A sebesség $v_a$-ról $v_A$-ra növekszik, a mozgási energia gyarapodását a gravitációs energia csökkenése fedezi:

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{mv_a^2}{2} = \frac{fmM}{R} - \frac{fmM}{R+h},$$

ebből:

$$v_A^2 - v_a^2 = 2fM \cdot \frac{h}{R(R+h)} = \frac{2ghR}{R+h} = 0{,}321 \cdot 10^6 \text{ (m/s)}^2.$$

Az impulzustörvényből származtatva $v_A$ értéket felhasználva

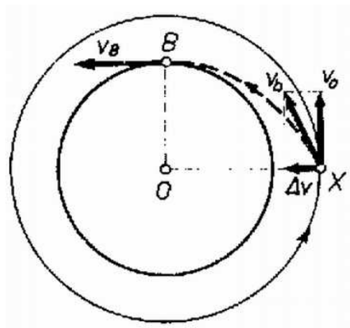
$$v_a^2\left[\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 - 1\right] = v_a^2 \cdot \frac{h(2R+h)}{R^2} = \frac{2ghR}{R+h},$$

$$v_a^2 = \frac{2gR^3}{(R+h)(2R+h)} = 2{,}65 \cdot 10^6 \text{ (m/s)}^2,$$

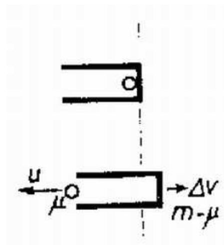
$$v_a = 1628 \text{ m/s}, \qquad v_A = 1724 \text{ m/s}.$$

Az ellenrakétázással létrehozandó sebességváltoztatás:

$$\Delta v = v_0 - v_a = 24 \text{ m/s}.$$




*3. ábra*




*4. ábra*

Az üzemanyag mennyiségének meghatározása céljából az impulzustörvényt az űrhajóhoz rögzített koordinátarendszerben alkalmazzuk (4. ábra). A kidobott anyagmennyiség: $\mu = \dfrac{m\Delta v}{u+\Delta v} = 28{,}7$ kg.

(L. az 1969. évi Eötvös-verseny 1. feladatát, ahol hasonló kérdés kissé eltérő, érdekes megoldása található.)

*b)* A rakétával a sugár mentén kifelé tüzelnek, és ezzel $\Delta v$ sebességet adnak hozzá a meglevő $v_0$-hoz, a középpont felé irányítva (3. ábra). Ekkor az űrhajó sebessége $v_b = \sqrt{v_0^2 + \Delta v^2}$, amellyel olyan ellipszis (parabola, hiperbola) pályán indul el, amelynek csúcspontja $B$, fókusza továbbra is $O$, és $X$-ben a pálya érintője $v_b$. $OX$ a kúpszelet ún. paramétere. $B$-ben a sebesség a $v_b$-nél nagyobb $v_B$ lesz.

A területi sebesség állandóságát írjuk fel, figyelembe véve, hogy $X$-nél a sugárra merőleges $v_0$ összetevő használandó:

$$v_B R = v_0(R+h), \qquad v_B = \frac{R+h}{R}\cdot v_0 = 1749\ \mathrm{m/s}.$$

A sebesség $v_b$-ről $v_B$-re növekszik, a mozgási energia növekedését a gravitációs energia csökkenése fedezi:

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_b^2}{2} = \frac{fmM}{R} - \frac{fmM}{R+h} = fmM\cdot\frac{h}{R(R+h)},$$

átalakítva:

$$v_B^2 - \left(v_0^2 + \Delta v^2\right) = \frac{2ghR}{R+h},$$

$$\Delta v^2 = v_B^2 - v_0^2 - \frac{2ghR}{R+h} = v_0^2\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 - v_0^2 - \frac{2ghR}{R+h} =$$

$$= v_0^2\left(\frac{R+h}{R}\right)^2 - v_0^2 - \frac{2h}{R}\cdot v_0^2 = v_0^2\cdot\frac{h^2}{R^2},$$

$$\Delta v = \frac{h}{R}\cdot v_0 = 97\ \mathrm{m/s}.$$

Ismét alkalmazzuk az űrhajóra az impulzustételt:

$$\Delta v(m-\mu) = \mu u, \qquad \mu = \frac{m\Delta v}{u+\Delta v} = 115\ \mathrm{kg}.$$

Az űrhajó indulási sebessége az új pályán $v_b = 1655$ m/s. Az űrhajó az $X$ pontból a kör érintőjéhez képest $\operatorname{arc\,tg}(\Delta v/v) = 3^\circ 21'$-es szögben indul el. A $B$ pontban a körpályán való mozgáshoz szükséges sebesség $\sqrt{gR} = 1700$ m/s. Mindaddig ellipszispályán mozog, amíg $v_B$ kisebb $\sqrt{2}\cdot 1700 = 2404$ m/s-nál. A mi 1749 m/s sebességünk messze ez alatt marad, tehát a pálya ellipszis.

**2.** *Egy alumíniumdarab tömegét sárgaréz súlyokkal mérjük, először száraz, majd* 15,2 Hgmm *parciális vízgőznyomású nedves levegőben. A teljes nyomás* (760 Hgmm) *és a hőmérséklet* (20°C) *mindkét esetben ugyanaz. Legalább mekkora tömegű alumíniumdarab esetében veszünk észre különbséget a két mérés között, ha a mérleg érzékenysége* 0,1 mg*? Az alumínium sűrűsége* 2,7 g/cm$^3$*, a sárgarézé* 8,5 g/cm$^3$.

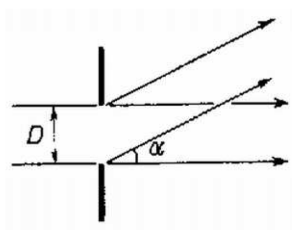
**Megoldás.** A vízgőz parciális nyomása a teljes nyomás ötvened része, tehát a levegő térfogatának ötvened része van vízgőzzel helyettesítve. 20°C-on a levegő sűrűsége 0,0012 g/cm$^3$, a vízgőzé 0,00075 g/cm$^3$, a nedves levegőnké:

$$\frac{49 \cdot 0{,}0012 + 1 \cdot 0{,}00075}{50}\ \mathrm{g/cm^3} = 0{,}00119\ \mathrm{g/cm^3}.$$

A száraz és nedves levegő sűrűségének különbsége így 0,00001 g/cm$^3$.

1 gramm alumínium térfogata 0,370 cm$^3$, 1 gramm sárgarézé 0,117 cm$^3$, ezek különbsége 0,253 cm$^3$. A száraz levegőt nedvessel felcserélve 1 grammos testek kiegyensúlyozásakor a felhajtóerők különbsége 0,253 cm$^3$ $\cdot$ 0,00001 g/cm$^3$ = 0,0000025 grammos tömeg súlyát jelenti. Mérlegünk 0,0001 grammos tömeg súlyát képes érzékelni, ezért az eltérés akkor válik észrevehetővé, ha a mérendő alumíniumdarab tömege az 1 g-os mintáénál 0,0001 g : 0,0000025 g = 40-szer nagyobb.

**3.** *A Hold felszínére egy* $\lambda = 0{,}69\ \mu$m *hullámhosszú fényt adó lézer sugarát irányítjuk egy* $D = 2{,}6$ m *átmérőjű parabolatükrös távcső segítségével. A Holdon* $d = 20$ cm *átmérőjű síktükröt helyeztek el a fény visszaverése céljából. Ez a tükör a fényt pontosan a földi távcső felé veri vissza; a távcső fókuszában fotoérzékelő van. A Föld–Hold távolság* $L =$ 380 000 km. a) *Milyen szögpontossággal kell beállítani a távcsövet?* b) *Az eredetileg kibocsátott energiából mennyit fog fel a fotoérzékelő? (A veszteségektől eltekintünk.)* c) *Ha a fénylökés energiája* 1 joule*, akkor szabad szemmel megfigyelve hány foton jutna szemünkbe? A pupilla átmérője* 5 mm. d) *Mennyi energiát kapna vissza a fotoérzékelő, ha a Holdon nem helyeztünk volna el tükröt? A Hold felszíne a ráeső fény* 10%*-át minden irányban egyenletesen veri vissza.*




*5. ábra*

**Megoldás.** *a)* A lézer csak mint erős, pontszerű fényforrás szerepel, a mi esetünkben az irányításban nincs szerepe. A távcső $\pi(D/2)^2 = 5{,}31\ \mathrm{m}^2$ nagyságú nyílásterülete mint fényt kibocsátó rés szerepel, és a sugárnyalábot a diffrakció szélesíti ki (5. ábra). A rés Huygens szerint mint hullámfelület működik, az eredeti irányban adja a legnagyobb intenzitást és $\lambda = D \sin\alpha$ irányban az első interferenciás kioltást. Legjobb volna, ha a tengely pontosan a holdi tükör felé mutatna. Ha $\sin\alpha = \lambda/D$ szögnél nagyobb az irányeltérés, akkor biztosan alig kap fényt a holdi tükör. Ez a szög: $\alpha \approx \sin\alpha = \dfrac{\lambda}{D} = \dfrac{0{,}69 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}}{2{,}6\ \mathrm{m}} = 2{,}65 \cdot 10^{-7} = 0{,}055''$. Ennél lényegesen pontosabb legyen az irányítás. E szögön belül sem egyenletes a fényeloszlás, a széle felé csökken, ezért minden további számításunk csak közelítő pontosságú.

*b)* Az ismertetett diffrakció következtében a Holdon egy megvilágított kör keletkezik, amelynek átmérője $\alpha L = \dfrac{\lambda}{D} \cdot L = 101$ m, területe $\pi(L\lambda/2D)^2 = 7987\ \mathrm{m}^2$. Ezen oszlik szét az $E$ összes kisugárzott energia és így az átlagos energiasűrűség:

$$E : \frac{\pi\lambda^2 L^2}{4D^2} = \frac{4D^2 E}{\pi\lambda^2 L^2} = 0{,}125 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\mathrm{m}^2} E.$$

A $d$ átmérőjű és $\pi(d/2)^2 = 0{,}0314\ \mathrm{m}^2$ területű holdi síktükörre jutó energia:

$$\frac{4D^2 E}{\pi\lambda^2 L^2} \cdot \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^2 \cdot E = 3{,}94 \cdot 10^{-6} E.$$

A síktükör mindezt az energiát visszadobja, de ismét a diffrakció miatt $\lambda/d = \beta = 3{,}45 \cdot 10^{-6}$ radián $= 0{,}71''$ nagyságú szögtartományban (6. ábra, nem méretarányos). A Földön $\beta L = \dfrac{\lambda L}{d} = 1310$ m átmérőjű, $1{,}72 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^2$ területű kör kap fényt. Ezen oszlik szét a Hold által visszavert $(Dd/L\lambda)^2 E$ energia, tehát a visszavert fény által a Földön létrehozott energiasűrűség:

$$\left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^2 E : \pi\left(\frac{L\lambda}{2d}\right)^2 = \frac{4D^2 d^4}{\pi L^4 \lambda^4} \cdot E = 2{,}3 \cdot 10^{-12} \frac{1}{\mathrm{m}^2} E.$$

A $\pi(D/2)^2$ területű észlelő távcsőbe jutó energia:

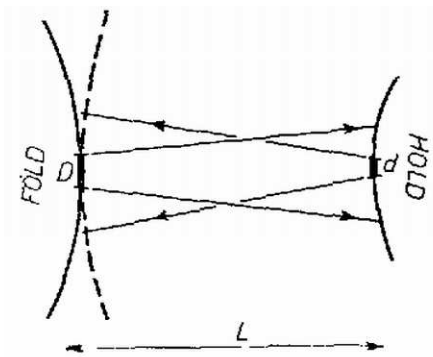
$$\frac{4D^2d^4E}{\pi L^4\lambda^4}\cdot\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2=\left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^4E=15{,}8\cdot10^{-12}E.$$

Tehát az eredeti energia 16 billiomod részét kapjuk vissza.

*c)* A pupilla területe $\pi\cdot2{,}5^2$ mm$^2$ = 20 mm$^2$ = $20\cdot10^{-6}$ m$^2$; ezt kell szorozni a Földön létrejött $2{,}3\cdot10^{-12}\frac{1}{\mathrm{m}^2}\cdot E$ energiasűrűséggel ($E=1$ joule), az energia $46\cdot10^{-18}$ joule.

A piros fényünk rezgésszáma $f=(3\cdot10^8\ \mathrm{m/s}):(0{,}69\cdot10^{-6}\ \mathrm{m})=4{,}35\cdot10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$, fotonjának energiája: $hf=2{,}89\cdot10^{-19}$ joule. A szembe jutó fotonok darabszáma $46\cdot10^{-18}:2{,}89\cdot10^{-19}=155$ foton.

Vajon észrevehetnénk-e szabad szemmel a visszavert fényt? Szemünk ideghártyájában csak a pálcikák fokozott érzékenységének vehetnénk hasznát. Ezek a 0,51 $\mu$m hullámhosszú zöld fény iránt a legérzékenyebbek, ekkor alkalmas körülmények között néhány fotont is érzékelni lehet. A pálcikák érzékenysége 0,6 $\mu$m-nél ennek százada, és még nagyobb hullámhosszú fény iránt teljesen érzéketlenek. Így szó sem lehet a szabad szemmel történő megfigyelésről. Azonkívül a Hold erős fénye is zavarna.




*6. ábra*

*d)* Ha nem helyezünk a Holdra tükröt, akkor a Holdra érkező összes fény tizede, $0{,}1E$ verődik vissza. (A 101 méteres kör teljes egésze könnyen ráfér a Holdra.) De a sokkal nagyobb, $0{,}1E$ energia most $L$ sugarú, $2\pi L^2=0{,}907\cdot10^{18}$ m$^2$ területű félkörön oszlik szét, és így a Földön létrehozott energiasűrűség:

$$\frac{0{,}1E}{2\pi L^2}=1{,}1\cdot10^{-18}\frac{1}{\mathrm{m}^2}\cdot E,$$

ebből a távcső által felfogott energia:

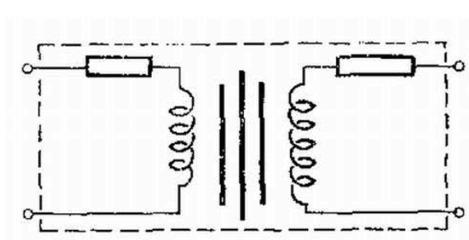
$$\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2\cdot\frac{0{,}1E}{2\pi L^2}=5{,}9\cdot10^{-18}E.$$

A *b)* esethez képest az energia-arány:

$$\left(\frac{Dd}{L\lambda}\right)^4\cdot E:\left[\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2\cdot\frac{0{,}1E}{2\pi L^2}\right]=80\cdot\frac{D^2d^4}{L^2\lambda^4}=27\cdot10^6.$$

Az eredmény több milliószor rosszabb a holdi tükör nélkül.

**Kísérleti feladat** Egy négy kivezetéses „fekete doboz” belsejét kellett mérésekkel felderíteni. Váltó- és egyenáramú áramforrások és mérőműszerek, valamint tolóellenállás adva voltak.



*7. ábra*

A doboz belsejét a 7. ábra mutatja. A következő megállapításokra kerülhetett sor.

A dobozban nincs áramforrás (sehogyan sem jön ki belőle semmi).

A dobozban nincs egyenirányító (átsarkalásokkor nem változnak a mérési adatok).

A dobozban két, egyenáram szempontjából nem összefüggő alkatrész van.

Ezután mérhetők az ellenállások, induktivitások és a kölcsönös indukció együtthatója.