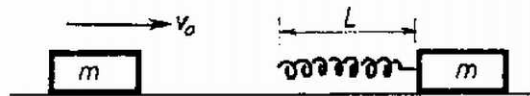


## Az I. forduló feladatai

1. Vízszintes asztallapon  $m$  tömegű test nyugszik, amelyhez  $D_0$  rugóállandójú,  $L$  hosszúságú rugó van erősítve (1. ábra). A rugó tengelyének egyenesében  $v_0$  sebességgel egy ugyancsak  $m$  tömegű test érkezik és a rugónak ütközik. A súrlódás és a rugó tömege elhanyagolható.



1. ábra

a)  
 b) Az érkező test rögzítődik a rugó bal végéhez. Mennyi a keletkező rezgés ideje?  
 Számadatok:  $m = 1$  kg,  $L = 0,2$  mter,  $D_0 = 250$  newton/mter,  $v_0 = 0,8$  m/s. Mennyi lesz a rugó legrövidebb hossza az ütközés folyamán?

b) Az érkező test rögzítődik a rugó bal végéhez. Mennyi a keletkező rezgés ideje?  
 Számadatok:  $m = 1$  kg,  $L = 0,2$  mter,  $D_0 = 250$  newton/mter,  $v_0 = 0,8$  m/s.

(Holics László)



2. ábra

**Megoldás.** A rugó akkor a legrövidebb, amikor a két test éppen egyenlő sebességgel mozog (2. ábra). Az impulzus-törvény szerint ez a sebesség az eredetinek a fele. Ebben az állapotban a mozgási energia  $0,5 \cdot 2m(v_0/2)^2 = mv_0^2/4$ , vagyis az eredetinek a fele. A másik feléből lett az összenyomott rugó  $0,5D_0x^2$  rugalmas energiája; ebből az összenyomódás  $x$  hossza:  $x = v_0\sqrt{m/2D_0} = 3,58$  cm és a rugóhossz:  $L - x = 16,4$  cm.

Összeakadás után a tömegek a  $v_0/2$  sebességgel haladó súlypont körül rezegnek. Mindegyik tömeghez a súlyponttól mérve a rugóhossz fele tartozik, ezért a rezgésidőnek a  $T = 2\pi\sqrt{m/D}$  képlet szerint történő kiszámításakor az előbbi rugóállandó kétszeresével,  $D = 2D_0$ -al kell számolnunk:

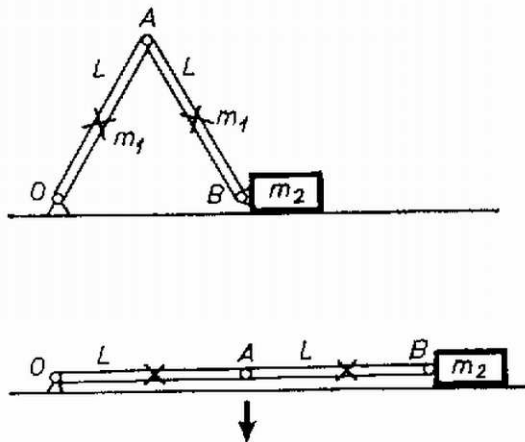
$$T = 2\pi\sqrt{m/2D_0} = 0,28 \text{ s.}$$

2.

a) Mekkora sebességgel érkeznek a talajhoz a szerkezet A-pontja?  
 b) Mekkora ebben a pillanatban az  $m_2$  tömegű test gyorsulása?  
 $L = 0,5$  mter hosszúságú, egyenként  $m_1 = 1$  kg tömegű rudakból csuklós szerkezetet állítunk össze, amelynek bal oldali vége a talajhoz, a jobb oldali vége az  $m_2 = 2$  kg tömegű testhez csuklósan van erősítve (3. ábra). A súrlódás elhanyagolható. Az  $m_2$  tömegű testet a rudak  $60^\circ$ -os helyzetében elengedjük.

a) Mekkora sebességgel érkeznek a talajhoz a szerkezet A-pontja?  
 b) Mekkora ebben a pillanatban az  $m_2$  tömegű test gyorsulása?

(Holics László)



3. ábra

**Megoldás.** A leérkezés pillanatában az  $m_2$  tömegű test már áll. Így a helyzeti energia csökkenése egyenlő a rudak mozgási energiájával. A helyzeti energia csökkenése  $2m_1gL\sqrt{3}/4$ , a rudak mozgási energiája (ha  $\omega$  szögsebességgel érik el a talajt)  $2 \cdot (\omega^2\Theta/2)$ , ahol  $\Theta = m_1L^2/3$  a tehetetlenségi nyomaték. Tehát

$$\frac{\omega^2 m_1 L^2}{3} = m_1 g L \frac{\sqrt{3}}{2},$$

azaz

$$\omega = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}g}{2L}} = 3,57 \text{ m/s.}$$

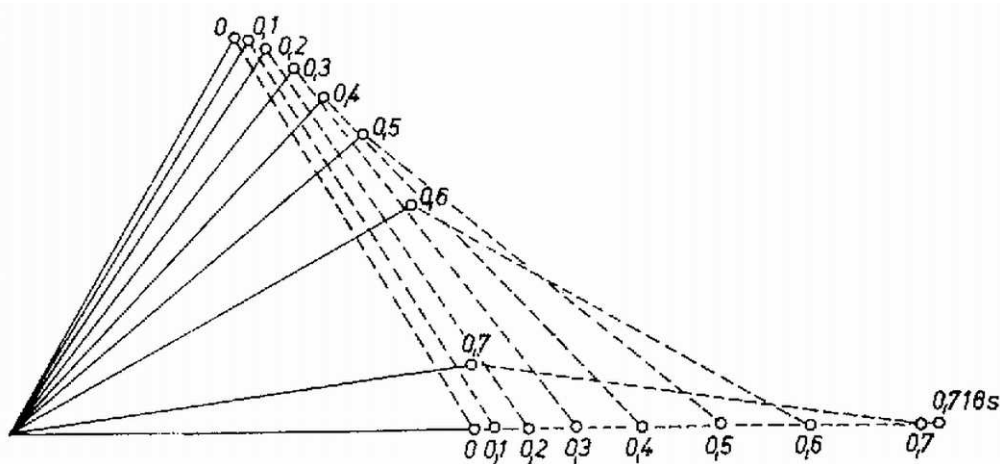
Az A pontnak a leérkezés pillanatában csak centripetális gyorsulása van:

$$a = \frac{v^2}{L} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot g,$$

azonban a berendezés geometriájából következően a B pont gyorsulása ebben a pillanatban ennek kétszerese, így a kért gyorsulás nagysága, amely szintén független a tömegektől és a rúd hosszától

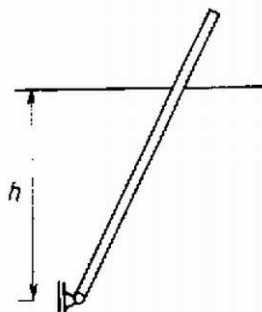
$$3\sqrt{3}g = 50,92 \text{ m/s}^2.$$

Amint az az ilyen feladatoknál megszokott, a sebességnek az úttól való függését az energiatétellel viszonylag könnyen meg lehet határozni. Azonban, ha a sebességnek az időtől való függését keressük, akkor a választ nem adhatjuk meg elemi függvényekkel zárt alakban, hanem numerikus módszerekkel kell dolgozni a szükséges pontosságig. Feladatunkban fokról fokra kiszámíthatjuk, mekkora a szögsebesség megváltozása, a szögsebességből viszont közelítően megtudjuk az egyes állapotok között eltelt időt. Így megszerkeszthető a mozgás időbeli lefolyásának képe (4. ábra). Félméteres rudak esetében 0,72 s múlva lesz a mozgásnak vége. Ilyen táblázatból a sebességek és a gyorsulások időfüggése is meghatározható. Az  $m_2$  tömegű test sebessége közvetlenül a leérés előtt maximális, azután hirtelen esik nullára.



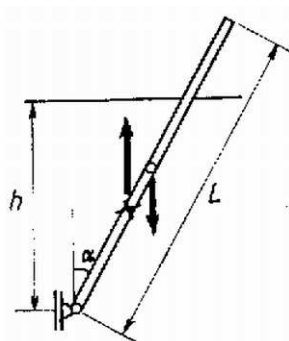
4. ábra

3.  $L = 1$  méter hosszú,  $\gamma$  faj súlyú vékony pálca egyik végét a víz alatt  $h = 0,8$  méter mélységben csapágyasztuk (5. ábra). Határozzuk meg a pálca egyensúlyi helyzetét és vizsgáljuk meg az egyensúlyi helyzet stabilitását, ha a)  $\gamma = 0,005 \text{ N/cm}^3$ , b)  $\gamma = 0,00853 \text{ N/cm}^3$ ?



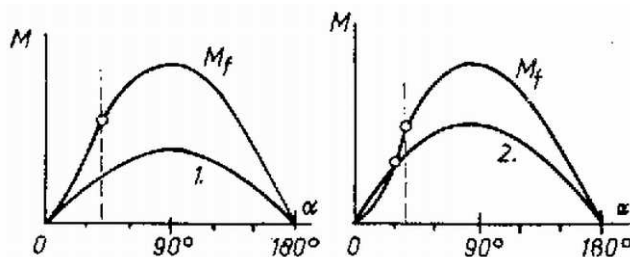
5. ábra

**Megoldás.** Az egyensúlyt a felhajtóerő és a súlyerő forgatónyomatékainak az egyenlősége jelenti. Jelentse  $\alpha$  a függőleges helyzettől mért szöveget (6. ábra).



6. ábra

Ha az egész pálca víz alatt van, a felhajtóerő  $AL\gamma_v$  ( $\gamma_v$  a víz fajsúlya), az erőkar  $(L/2) \sin \alpha$ , így a forgatónyomaték  $((AL^2\gamma_v/2) \sin \alpha$  (7. ábra). Ha  $\alpha$   $0^\circ$  és  $37^\circ$  közé esik, a pálca egy része kiáll a vízből. Ekkor az előbbi mennyiségek: felhajtóerő:  $Ah\gamma_v/\cos \alpha$ , erőkar:  $(\mu/2) \operatorname{tg} \alpha$  forgatónyomaték:  $(Ah^2\gamma_v \operatorname{tg} \alpha)/(2 \cos \alpha)$  ( $M_f$  görbe a 7. ábrán).



7. ábra

A súlyerő forgatónyomatéka [az  $AL\gamma$  súlyerő és az  $(L/2) \sin \alpha$  erőkar szorzata:  $(AL^2\gamma/2) \sin \alpha$ ] mindvégig sinus-függvény szerint alakul, amelynek amplitúdóját a bot fajsúlya szabja meg.

Amíg a bot fajsúlya kicsiny, a  $(h/L)^2\gamma_v = 0,64\gamma_v$  érték alatt van, a súly forgatónyomatékának görbéje (1.) teljesen az  $M_f$  görbe alatt van (1. a 7. ábrát). Ez a határ onnan adódik, hogy ekkor indul  $M_f$  görbéje és a súlyerő forgatónyomatékának görbéje egyenlő iránytangenssel. Az 1. görbének és  $M_f$ -nek két metszéspontja van az  $\alpha = 0$  és az  $\alpha = 180^\circ$  helyeken. Az első helyzet a stabilis, mert ekkor kis kimozdulásakor  $M_f$  gyorsabban növekszik, mint 1. Ez a mi esetünk is,  $\gamma = 0,5\gamma_v$ -nél. Az  $\alpha = 180^\circ$ -hoz tartozó egyensúlyi helyzet labilis.

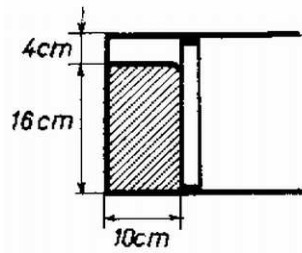
Ha a bot fajsúlya  $(h/L)^2\gamma_v$  és  $\gamma_v$  között van, akkor a súlyerő forgatónyomatékának a görbéje egy harmadik metszéspontot is ad  $M_f$  görbéjének kezdeti, behorpadt részén:

$$\frac{AL^2\gamma \sin \alpha}{2} = \frac{Ah^2\gamma_v \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \alpha}$$

Ennek megoldása  $\alpha$ -ra:  $\cos \alpha = \frac{h}{L} \sqrt{\frac{\gamma_v}{\gamma}} = 0,866$ ,  $\alpha = 30^\circ$ . Ez a felelet a második kérdésre; a bot részben kiáll a vízből stabilis egyensúlyi helyzetben, mert a vizsgálat azt mutatja, hogy balra–jobbra történő kis kimozdulások után a forgatónyomatékok visszaviszik ebbe a helyzetbe a botot. Épp így megmutatható, hogy a  $0^\circ$ -hoz és  $180^\circ$ -hoz tartozó egyensúlyi helyzetek labilisak.

Ha a bot fajsúlya nagyobb, mint  $\gamma_v$ , akkor a súly forgatónyomatékának a görbéje  $M_f$  görbéje fölé emelkedik és csak  $\alpha = 180^\circ$ -nál ad stabilis egyensúlyi helyzetet: a bot függőlegesen lefelé lóg.

4.  $A = 20 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}$  alapterületű, fekvő négyzetes oszlopban vastag, elhanyagolható súlyú dugattyú zár el  $3200 \text{ cm}^3$  higanyt és  $800 \text{ cm}^3$  levegőt. A külső levegő nyomása  $10 \text{ N/cm}^2$  (azaz  $73,5 \text{ cm-es}$  higanyoszlop nyomása). A higany fajsúlya  $0,136 \text{ N/cm}^3$ . Hol helyezkedik el a dugattyú, ha a négyzetes oszlopot (8. ábra) függőleges helyzetbe hozzuk a) nyitott végével felfelé és b) nyitott végével lefelé?

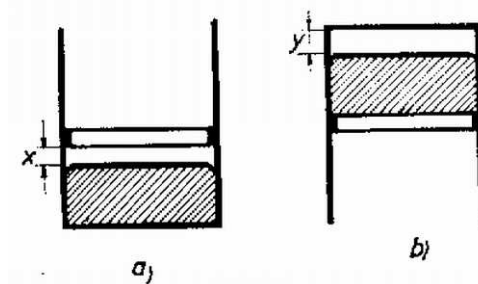


8. ábra

(Vermes Miklós)

**Megoldás.** A lényeges pont a levegő nyomásának a meghatározása a kezdeti állapotban. A  $400 \text{ cm}^2$  területű dugattyút a külső levegő  $4000 \text{ N}$  erővel nyomja. A higanyoszlop hidrosztatikai nyomása a fenéken  $16 \cdot 13,6 \cdot 0,01 \text{ N/cm}^2$ . Átlagban ennek a felével kell számolnunk és ez  $20 \cdot 16 \text{ cm}^2 = 320 \text{ cm}^2$  területen  $0,5 \cdot 16 \cdot 13,6 \cdot 0,01 \cdot 320 \text{ N} = 348,16 \text{ N}$  erőt ad. A bezárt levegő nyomása a higanyon keresztül átadódik a dugattyúnak és a helyzet olyan, mintha a levegő  $p$  nyomása az egész  $400 \text{ cm}^2$ -nyi felületet nyomná. Az erők egyenlősége:

$$348,16 \text{ N} + 400 \text{ cm}^2 p = 4000 \text{ N}.$$

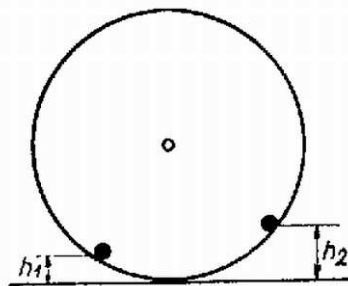


9. ábra

Innen a bezárt levegő nyomása:  $p = 9,1 \text{ N/cm}^2$ . Az a) esetben (9a. ábra) a higany nem számít; Boyle–Mariotte törvényéből  $x = 1,8 \text{ cm}$ . A b) esetben (9b. ábra) a külső légköri levegő nyomásából levonandó a  $8 \text{ cm}$  magas higanyoszlop  $8 \cdot 0,136 \text{ N/cm}^2 = 1,09 \text{ N/cm}^2$  nyomása; Boyle–Mariotte törvényével  $y = 2,05 \text{ cm}$ .

## A II. forduló feladatai

1. Az  $R = 1,4 \text{ mter}$  sugarú gömbhéj belső felületén kis test mozog súrlódásmentesen (10. ábra). Sebessége  $h_1 = 0,1 \text{ mter}$  magasságban a legnagyobb,  $h_2 = 0,3 \text{ mter}$  magasságban a legkisebb. Mekkora ezek a sebességek?

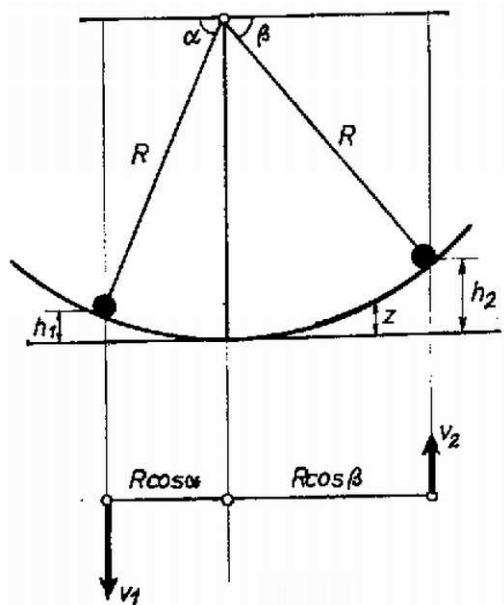


10. ábra

(Dr. Bodó Zoltán)

**Megoldás.** Abból, hogy  $v_1$  a legnagyobb, illetve  $v_2$  a legkisebb, következik, hogy mindkét sebesség vízszintes irányú. Az egyik egyenletet az energiátörvény adja:

$$(1) \quad mgh_1 + mv_1^2/2 = mgh_2 + mv_2^2/2.$$



11. ábra

Nézzük a test helyzetét felülnézetben is (11. ábra). A testre ható kényszererő a középpont felé hat, a súlyerő függőleges. Tehát a vízszintes síkra vetített mozgást nézve nincs forgatónyomaték. Ilyenkor a vetületre érvényes a területi sebesség állandóságának (az impulzusnyomaték, perdület állandóságának) törvénye. A vetületben a vezérsugarak  $R \cos \alpha$  és  $R \cos \beta$ , továbbá az ábra alapján

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{R^2 - (R - h_1)^2}}{R} = \frac{\sqrt{2Rh_1 - h_1^2}}{R},$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{R^2 - (R - h_2)^2}}{R} = \frac{\sqrt{2Rh_2 - h_2^2}}{R}.$$

A területi sebesség állandóságát kifejező

$$v_1 R \cos \alpha = v_2 R \cos \beta$$

összefüggésbe helyettesítve

$$(2) \quad v_1 \sqrt{2Rh_1 - h_1^2} = v_2 \sqrt{2Rh_2 - h_2^2}.$$

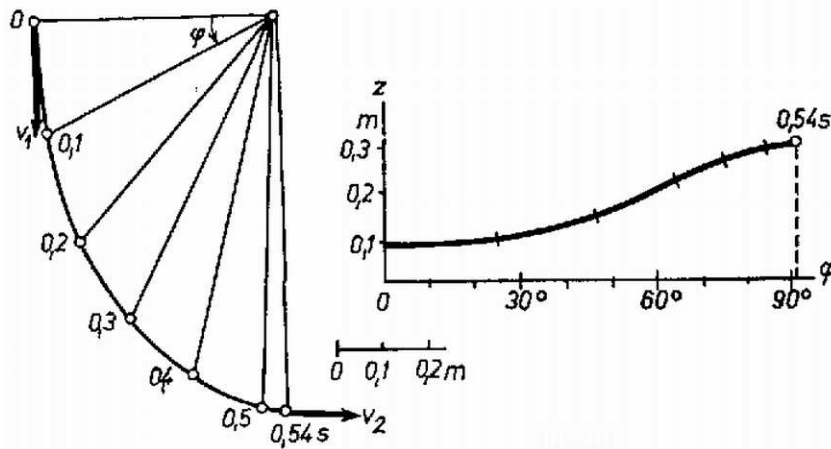
A kapott egyenletrendszer megoldása:

$$v_1 = \sqrt{2gh_2 \cdot \frac{2R - h_2}{2R - (h_1 + h_2)}} = 2,5 \text{ m/s},$$

$$v_2 = \sqrt{2gh_1 \cdot \frac{2R - h_1}{2R - (h_1 + h_2)}} = 1,5 \text{ m/s}.$$

Néhány lényeges megjegyzést kell tenni. A területi sebesség állandóságának törvényét a vetületben csak annak megállapítása után szabad alkalmazni, hogy az erőknek (a vetület szempontjából) nincs forgónyomatékuk. Akármilyen körben járkáló szerkezetre nem volna szabad alkalmazni az említett törvényt.

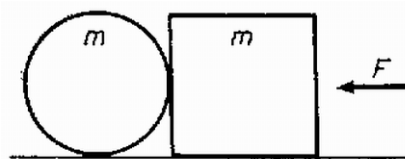
A feladat a mechanikából ismert úgynevezett gömbinga. Egyáltalán nem igaz, hogy a pálya legalacsonyabb és legmagasabb pontjai a gömb átellenes oldalán vannak. Ilyen állítást nem is használtunk fel.



12. ábra

A mechanika törvényeit századmásodpercről századmásodpercre numerikus számításban alkalmazva, nyomon követhetjük a gömbinga mozgását. A 12. ábra feladatunk adatai mellett először felülnézetben, vízszintes vetületben mutatja a pályát. A test  $91^\circ$ -os vezérsugár-elfordulás után,  $0,54$  s múlva ér legmagasabb pontjára, azután újra lefelé megy. Így hullámozva jár két szélességi kör között. A jobb oldali rajz az elért magasságot a szögelfordulás függvényében mutatja. A pálya természetesen nem síkgörbe.

2. Vízszintes lapon egy henger és egy kocka mozoghat, miközben a henger egy alkotója mentén érintkezik a kockával (13. ábra). A henger átmérője egyenlő a kocka oldalélével, a két test tömege is egyenlő. Mindegyik felületen a tapadási súrlódási együttható  $\mu_0$ , a csúszási súrlódási együttható  $\mu$  ( $\mu > \mu_0$ ). Mekkora legyen az  $F$  állandó tolóerő, hogy a két test mozgása közben a kocka gördülés nélkül tolja maga előtt a hengert? Szám adatok:  $m = 12$  kg,  $\mu = 0,2$ ,  $\mu_0 = 0,6$ ,  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.



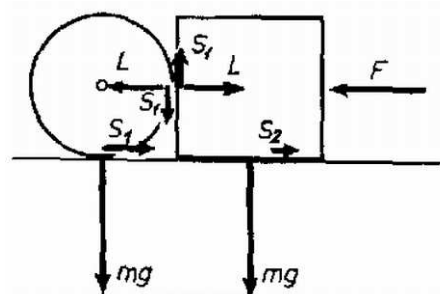
13. ábra

(Légrádi Imre)

**Megoldás.** Ha a henger gördülés nélkül mozog, akkor alján a csúszó súrlódási együtthatóval számítandó az  $S_1$  súrlódási erő, de ennek jelentkeznie kell a henger és a kocka találkozási élénél is, a hengernél lefelé, a kockánál felfelé, annak súlyát részben kiegyenlítve.

A csúszó súrlódási erő a henger aljánál, annak  $S_1$ -gyel növelt súlyát is figyelembe véve (l. a 14. ábrát):

$$S_1 = \mu(mg + S_1).$$



14. ábra

Abban a határesetben, amikor még nincs gördülés, a henger és a kocka közös élénél:

$$S_1 = \mu_0(ma + S_1),$$

ugyanis a normális erő a henger gyorsításához és az  $S_1$  fedezéséhez szükséges erők összege. Az egyenletrendszer megoldása:

$$a = \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \frac{1 - \mu_0}{1 - \mu} \cdot g, \quad S_1 = \frac{mg}{1 - \mu}.$$

A kocka alsó lapján működő súrlódási erő, figyelembe véve  $S_1$  emelő hatását:

$$S_2 = \mu(mg - S_1).$$

Mindezek ismeretében az  $F$  tolóerő:

$$F = ma + S_1 + ma + S_2 = mg \cdot \frac{2\mu(1 - \mu\mu_0)}{\mu_0(1 - \mu)} = 88 \text{ newton}.$$

Tehát a henger 88 newtonnál nagyobb erő esetében mozog gördülésmentesen. Nyugalomból való induláshoz  $2mg\mu_0 = 144$  newtonnál nagyobb erőre van szükség. Ha tehát legalább ekkora erő hatására elindult a szerkezet, akkor 88 newtonig csökkentve az erőt a henger nem gördül. Ennél kisebb erő esetében gördül a henger, de  $2mg\mu = 48$  newton alatt minden megáll.

3. Az  $a_1$  vastagságú,  $n_1 = 2,7$  törésmutatójú üveglemezre  $a_2$  vastagságú,  $n_2 = 2,43$  törésmutatójú, majd  $a_3$ ,  $a_4$  vastagságú,  $n_3$ ,  $n_4$  törésmutatójú üvegrétegeket helyezünk (15. ábra). Az  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  pontokból egyszerre induló fénysugarak egyidejűleg érkeznek  $B_2$ ,  $B_3$ ,  $B_4$  pontokba a teljes visszaverődés határszögével.  $A_2B_2 = A_3B_3 = A_4B_4 = b = 10$  mm. Mekkora az  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  rétegek vastagsága és mekkorák az  $n_3$ ,  $n_4$  törésmutatók?

(Vermes Miklós)

**Megoldás.** Felírjuk az  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  rétegekre érvényes adatokat.

A fénysugarak:  $b/\sin \alpha_1$ ,  $b/\sin \alpha_2$ ,  $b/\sin \alpha_3$ .

A sebességek:  $c/n_1$ ,  $c/n_2$ ,  $c/n_3$ .

A menetidők:  $n_1(b/c) \sin \alpha_1 = n_2(b/c) \sin \alpha_2 = n_3(b/c) \sin \alpha_3$ .

Teljes visszaverődés folytán:  $\sin \alpha_1 = n_2/n_1 \sin \alpha_2 = n_3/n_2 \sin \alpha_3 = n_4/n_3$ .

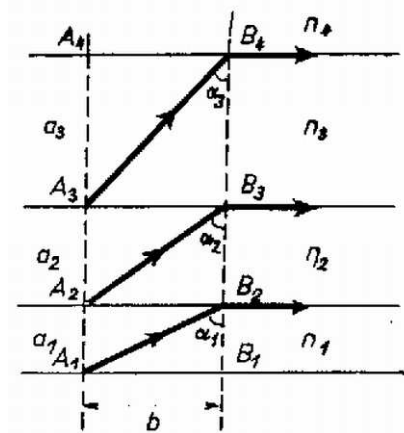
Felhasználva ezeket a menetidőknél:  $\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_3}{n_2} = \frac{n_4}{n_3} = k$ .

Tehát a feladat feltételének olyan törésmutatók felelnek meg, amelyekre  $k$  állandó. Számadatainkkal  $k = 2,43/2,7^2 = 1/3$ .

A feladatban keresett törésmutatók:

$$n_3 = kn_2^2 = k^3n_1^4 = 1,968,$$

$$n_4 = kn_3^2 = k^7n_1^8 = 1,291.$$



15. ábra

Így a szögekre a következőket kapjuk:

$$\sin \alpha_1 = kn_1 = 0,9;$$

$$\sin \alpha_2 = k^2n_2^2 = 0,81;$$

$$\sin \alpha_3 = k^4n_4^4 = 0,6561;$$

$$\alpha_1 = 64^\circ 09',$$

$$\alpha_2 = 54^\circ 06',$$

$$\alpha_3 = 41^\circ 00'.$$

A rétegvastagságok:

$$a_1 = b \operatorname{ctg} \alpha_1 = b \cdot \frac{\sqrt{1 - k^2 n_1^2}}{k n_1} = 4,8 \text{ mm},$$

$$a_2 = b \operatorname{ctg} \alpha_2 = b \cdot \frac{\sqrt{1 - k^4 n_1^4}}{k^2 n_1^2} = 7,2 \text{ mm},$$

$$a_3 = b \operatorname{ctg} \alpha_3 = b \cdot \frac{\sqrt{1 - k^8 n_1^8}}{k^4 n_1^4} = 11,5 \text{ mm}.$$

A feladat a száloptika egy problémájának leegyszerűsített alakja. Vékony üvegszálakban, amelyeket fénysugaras hírvitelre használnak, szükséges, hogy a különböző irányban a szálba egyszerre belépő fénysugarak különböző útjaik ellenére egyszerre érkezzenek meg. Ez elérhető, ha a szálban a középponttól mért távolság négyzetes függvénye szerint csökken a törésmutató.

### A III. kísérleti forduló

A III. kísérleti forduló Debrecenben, a Kossuth Lajos Tudományegyetem Kísérleti Fizikai Intézetének rendezésében folyt le. A két feladat közül az egyikben fajhőméréssel, a másikban egy váltakozó áramú tekercs terének kimérésével kellett foglalkozni.