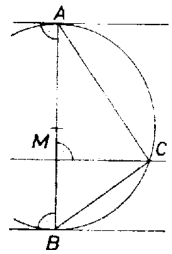
I. megoldás. 1. Tekintsük először a különleges esetet. Ha a megrajzolt érintők párhuzamosak, akkor AB a körnek átmérője, tehát az ABC háromszögben C-nél derékszög van, továbbá az M pont – szerkesztésénél fogva – C-nek a vetülete AB-n (1. ábra).

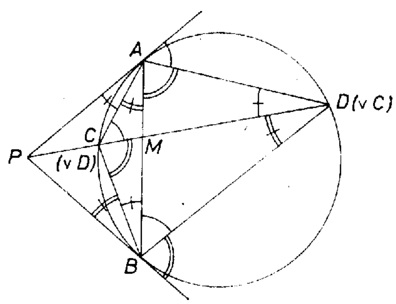


1. ábra

Így az ismert mértani középarányos tétel szerint

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AM\cdot AB}{BM\cdot BA}=\frac{AC^2}{BC^2}.$$

2. Legyen a két érintő metszéspontja P, és a PC szelőnek a körrel való második metszéspontja D (különböző C-től, mert a szelő a két érintő közt halad). C és D szerepe a továbbiakban fölcserélhető, emiatt nincs szükség szétválasztani vizsgálatunkat két esetre, PC és PD nagyságviszonya szerint. Összekötve D-t A-val és B-vel és az érintőket meghosszabbítva, a 2. ábrán A-nál és B-nél négy-négy szöget jelöltünk meg egymástól megkülönböztető jelekkel, C-nél és D-nél pedig kettőt – kettőt.



2. ábra

E 12 szög közül a kerületi szögek tételei alapján $3-3$ (egyezően jelölt) szög egyenlő. Ezek alapján állítjuk párokba az alább felhasználandó hasonló háromszögeket.

Első lépésül a kérdéses $AM:MB$ arányt kifejezzük az $ACBD$ húrnégyszög oldalaival:

$$AMC\triangle\sim DMB\triangle,\text{ emiatt: }\frac{AM}{DM}=\frac{AC}{DB},$$
$$DMA\triangle\sim BMC\triangle,\text{ emiatt: }\frac{DM}{BM}=\frac{DA}{BC},$$

és e két egyenlőség bal, valamint jobb oldalait összeszorozva

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AC}{DB}\cdot\frac{DA}{BC}=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AD}{BD}.$$

Második lépésül megmutatjuk, hogy D szerkesztése folytán itt a jobb oldal második tényezője egyenlő az elsővel, ezzel bebizonyítjuk az állítást. Valóban

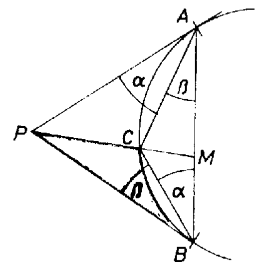
$$PDA\triangle\sim PAC\triangle,\quad\text{emiatt}\quad\frac{AD}{DP}=\frac{CA}{AP},$$
$$PDB\triangle\sim PBC\triangle,\quad\text{emiatt}\quad\frac{DP}{DB}=\frac{BP}{BC}.$$

Végül ezeket összeszorozva és figyelembe véve PA és PB egyenlőségét:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC},$$

amint állítottuk. –Megjegyezzük végül, hogy legutóbbi eredményünk ön-magában is érdekes, ha ti. CD átmegy az A–és B-beli érintők közös pontján.

II. megoldás. A 3. ábra szögjelöléseivel a P létezése és a $PC < PM$ nagyságviszony esetére a háromszög sinustételének ismételt alkalmazásával bizonyítjuk az állítást, figyelembe véve, hogy a C-nél a PM egyenes két oldalán keletkezett kiegészítő szögek sinusa egyenlő, és hogy $PA = PB$.



3. ábra

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AM}{CM} \cdot \frac{CM}{MB} = \frac{\sin ACM\sphericalangle}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin MCB\sphericalangle} = \frac{\sin ACP\sphericalangle}{\sin BPC\sphericalangle} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{AP}{PC} \sin \alpha}{\dfrac{BP}{PC} \cdot \sin \beta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}\right)^2 = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

(A felhasznált háromszögek egymás után ACM és BCM, majd ACP és BCP, végül ABC.)

Megjegyzések. 1. A két érintő párhuzamosságának esetét a II. megoldásban már figyelmen kívül hagytuk. Az állításnak ez a kiegészítése csak a teljesség kedvéért történt. Ugyanis A és B speciális kölcsönös helyzete esetében is van az AB szakaszon olyan M pont, melyre $AM : MB = AC^2 : BC^2$, és erre az esetre mondja az állítás, hogy az MC egyenes ekkor is egyszerű kapcsolatba hozható az A és a B pontbeli érintővel.

2. Ajánljuk az érdeklődőknek, hozzák kapcsolatba feladatunkat az 1973. évi Arany Dániel tanulóversenyek haladó csoportbeli egyik feladatával: a háromszög egyik súlyvonalát tükrözve a vele közös csúcsból induló szögfelezőre, a tükörkép a szemközti oldalt olyan arányban osztja, mint a csúcsban összefutó oldalak négyzeteinek aránya. (A tükörképet röviden *szimmediánnak* szokás nevezni, mint a *medián*-súlyvonal szimmetrikusát.)