(1) $$px^2+qy^2+rx+sy+t=0$$

Tegyük fel, hogy az (1) egyenletet két egymást metsző egyenes pontjai – és csak ezek – elégítik ki. Legyenek a két egyenes $M$ metszéspontjának a koordinátái $M(u;v)$, ekkor

(2) $$pu^2+qv^2+ru+sv+t=0.$$

Ha a $P\,(x;y)$ koordinátákra teljesül (1), akkor a

(3) $$\xi=x-u,\quad \eta=y-v$$

koordinátákra

$$p(\xi+u)^2+q(\eta+v)^2+r(\xi+u)+s(\eta+v)+t=0$$

teljesül, ami (2) alapján ekvivalens a

(4) $$p\xi^2+q\eta^2+r_0\xi+s_0\eta=0$$

egyenlettel, ahol

(5) $$r_0=2pu+r,\quad s_0=2qv+s.$$

Megfordítva: ha $(\xi;\eta)$-ra teljesül (4), akkor a $(\xi;\eta)$-hoz (3) alapján hozzárendelt $(x;y)$-ra teljesül (1). Mivel $P$-vel együtt az $MP$ egyenes minden pontja kielégíti az (1) egyenletet, ha $(x;y)$-ra teljesül (1), akkor tetszőleges $t$ mellett az

$$x_t=u+t(x-u);\quad y_t=v+t(y-v)$$

koordinátákra is teljesül (1). A fenti átfogalmazás szerint ez azt jelenti, hogy ha $(\xi;\eta)$-ra teljesül (4), akkor $(t\xi;t\eta)$-ra teljesül az, vagyis (4) maga után vonja a

$$(p\xi^2+q\eta^2)t^2+(r_0\xi+s_0\eta)t=0$$

teljesülését is. Viszont (4)-ből

$$(p\xi^2+q\eta^2)t^2+(r_0\xi+s_0\eta)t^2=0.$$

A két egyenletet összevetve:

(6) $$r_0\xi+s_0\eta=0.$$

Ezek szerint valamely $(\xi;\eta)$ párra csak úgy teljesülhet (4), ha erre a párra (6) is teljesül.

Visszatérve (3) segítségével az $(x;y)$ koordinátákra, (6)-ból a

(7) $$r_0x+s_0y=r_0u+s_0v$$

egyenletet kapjuk. Ha $r_0$, $s_0$ valamelyike nem volna 0, akkor (7)-et csak egy egyenes pontjai elégítenék ki, és csak ezek a pontok elégíthetnék ki (1)-et – ami feltevésünk szerint nem lehet. Tehát

(8) $$r_0=s_0=0,$$

miatt (4) a következő egyenlettel azonos

(9) $$p\xi^2+q\eta^2=0.$$

Ha itt $p=q=0$ volna, (9)-et tetszőleges $(\xi;\eta)$, és (1)-et tetszőleges $(x;y)$ kielégítené. Ha (9)-ben $p=0$, $q\neq 0$ volna, (9)-et csak az $\eta=0$, és (1)-et csak az $y=v$ egyenes pontjai elégítenék ki. Hasonlóan kapjuk, hogy $p\neq 0$, $q=0$ sem lehet, tehát $pq\neq 0$. Az sem lehet, hogy $p$ és $q$ előjele megegyezzen, hiszen ekkor (9)-et csak $\xi=\eta=0$, és (1)-et csak $x=u$, $y=v$ elégíthetné ki. Tehát (1) csak akkor lehet két metsző egyenes egyenlete, ha

(10) $$pq<0.$$

Ekkor (8) és (5) alapján

(11) $$u=-\frac{r}{2p},\quad v=-\frac{s}{2q},$$

tehát (2) szerint

(12) $$4t=\frac{r^2}{p}+\frac{s^2}{q}.$$

Ezzel beláttuk, hogy (10) és (12) szükséges feltétele annak, hogy az (1) egyenletet két egymást metsző egyenes pontjai – és csak ezek – elégítsék ki.

Ha a $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ paraméterekre teljesül (10) és (12), akkor (1) ekvivalens a

$$p(x-u)^2+q(y-v)^2=0 \tag{13}$$

egyenlettel, ahol $u$-t és $v$-t (11) határozza meg. Legyen $\sqrt{-\frac{q}{p}}=\lambda$, akkor (13) ekvivalens az

$$\big[(x-u)+\lambda(y-v)\big]\big[(x-u)-\lambda(y-v)\big]=0$$

egyenlettel, amit viszont az

$$(x-u)+\lambda(y-v)=0, \tag{14}$$

$$(x-u)-\lambda(y-v)=0 \tag{15}$$

egyenesek pontjai – és csak ezek – elégítenek ki. Mivel $\lambda\neq 0$, a (14) és (15) egyenletek különböző egyeneseket határoznak meg, amelyeknek $(u;v)$ közös pontja, vagyis (14) és (15) egymást metsző egyenesek egyenletei. A (10) és (12) feltételek teljesülése esetén tehát (1) egymást metsző egyenespár egyenlete, ezzel beláttuk, hogy a keresett szükséges és elégséges feltétel a (10) és (12) teljesülése.