I. megoldás. Az n egymás után született gyermeknek pusztán a nemük szerinti fölsorolása f (fiú) és l (leány) jelekkel 2^n-féle lehet (n-ed osztályú ismétléses variációk 2-féle elemből). A feladat zárójelbe tett megállapodása egyenértékű azzal, hogy a 2^n lehetséges fölsorolás mindegyike egyformán valószínű.

A kérdésünk szempontjából kedvező fölsorolások mindegyikében megkeressük a legidősebb (vagyis az első) olyan gyermeket, akinek van bátyja is, nénje is, öccse is és húga is, és a fölsorolásokat ennek a legidősebb gyermeknek a születés időrendjében kapott i sorszáma szerint összefogjuk egy-egy *osztály*ba. Nyilvánvalóan így minden kedvező fölsorolás egy és csak egy osztályba tartozik majd bele; i-t az illető osztály *index*ének nevezzük, értékére áll $3 \le i \le n-2$.

Az a tény, hogy az i sorszámú gyermek az *első megfelelő*, egyrészt azt jelenti, hogy a korábban született $(i-1)$ gyermek között van fiú is, lány is, de az öt közvetlenül megelőző $(i-1)$ sorszámú gyermek előtti $(i-2)$ testvér közt már vagy fiú nincs, vagy lány nincs. Ez az $(i-2)$ tagú együttes tehát csupa egyneműből áll. Jelöljük az együttest röviden $f^{(i-2)}$-vel, ill. $l^{(i-2)}$-vel, így az első i gyermek fölsorolása csak a következő 4 lehetőség valamelyike lehet:

$$f^{(i-2)},\, l,\, f; \quad l^{(i-2)},\, f,\, f; \quad f^{(i-2)},\, l,\, l; \quad l^{(i-2)},\, f,\, l. \tag{1}$$

Másrészt az jellemzi az i indexű osztályt, hogy minden egyes fölsorolásában az $(n-i)$ számú további (fiatalabb) testvér *nem mind* egynemű. Így az utóbbiak fölsorolása $m = 2^{n-i}-2$ különböző félének adódhat, hiszen csak a „csupa fiú" és a „csupa leány" sorrendek vannak kizárva a gondolható 2^{n-i} ismétléses variáció közül. Az m-féle befejezés mindegyike az (1) alatti kezdések mindegyikéhez hozzákapcsolható, tehát az i indexű osztályba

$$4m = 4(2^{n-i}-2) = 2^{n+2-i}-8$$

számú felsorolás tartozik.

Ezt a kifejezést az $i = 3, 4, 5, \ldots, n-2$ értékekre összegezve a kedvező felsorolások (családok) száma

$$\sum_{i=3}^{n-2}(2^{n+2-i}-8) = (2^{n-1}+2^{n-2}+\ldots+2^4)-8(n-4) = 2^n+16-8n,$$

végül a kérdezett valószínűség:

$$p = \frac{2^n-8(n-2)}{2^n} = 1-\frac{n-2}{2^{n-3}} \tag{2}$$

(speciálisan $n = 5$, 6, 7 és 10 esetére rendre 0,25; 0,5; 0,6875; 0,9375).

Veres Sándor (Debrecen, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)
Hargitai Bálint (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Meggondolásunk első része átvihető a gyermekek növekedő életkoruk szerinti felsorolására is. És ha minden gondolható kedvező felsorolásra megállapítjuk a legfiatalabb megfelelő gyermek j sorszámát is, és a felsorolásokat az első és utolsó megfelelő gyerek sorszámainak egyidejű figyelembevételével osztályozzuk, akkor az i és j indexű osztálybeli fölsorolásokban $j-(i-1)$ számú gyermeknek van bátyja is, nénje is, húga is és öccse is. Így kis módosítással fölvethető ez a kérdés is: találomra kiválasztva egy n gyermekkel bíró apa valamelyik gyermekét, mi a valószínűsége annak, hogy ennek a gyermeknek legyen bátyja is, öccse is, húga is és nénje is.

II. megoldás. Egyszerűbb számba venni a kérdés szempontjából kedvezőtlen – röviden: „tlen" sorrendeket, családokat.

Nyilván „tlen" az eset, ha nincs lány a családban vagy ha csak 1 van. Az előbbi egyetlen módon lehet: csupa fiúval, az utóbbi n-féleképpen, a leány 1, 2, …, n indexe szerint.

2 leányt véve is „tlen" a sorrend, ha nem áll köztük fiú: $ff\ldots fllff\ldots f$, mert egyik bátyjuknak sincs nénje, egyik öccsüknek sincs húga, és mert maguknak csak egyféle leánytestvérük van. Ilyen sorrend $(n-1)$-féle van az első leány indexe szerint. A 2 leány közé 1 fiút iktatva ez az egyetlen, akinek már van kétféle leánytestvére, de még ilyen „lfl-blokk" (változtathatatlan részsorrend) mellett is „tlen" a sorrend, ha a blokk a sorrend elején vagy a végén van, ami 2 módot jelent. Ha azonban az $(n-2)$ fiú közül legalább 2 van a két leány között, akkor a sorrend már kedvező, tekintet nélkül a további $n-4(\ge 1)$ fiú sorrendi helyzetére.

Az eddigiekben „lány" helyett mindenütt „fiút" mondva, fiú helyett viszont lányt – ugyanezeket az eredményeket kapjuk; tehát azokban a családokban, ahol valamelyik nemű gyermekből legföljebb 2 van, a „tlen" esetek száma $2\{1+n+(n-1)+2\} = 4n+4$; ugyanis így $n \ge 5$ miatt egyetlen családot sem számítottunk kétszeresen.

Ha lány is, fiú is legalább 3 van – azaz a leányok száma 3 vagy 4 vagy … $(n-3)$, ami együtt $(n-5)$ eset – az eddigiek mintájára minden esetben 4 „tlen" képezhető:

a) az összes lány is, az összes fiú is egy-egy blokkot alkot, ez 2 mód:
$l, \ldots, l, f, \ldots, f$ és $f, \ldots, f, l, \ldots, l$;

b) a most mondott két blokk csatlakozásánál levő két gyerek sorrendjét fölcseréljük:

$$\underbrace{l, l, \ldots, l,}_{\text{legalább 2}} \; f, l, \; \underbrace{f, f, \ldots, f,}_{\text{legalább 2}} \quad \text{és} \quad \underbrace{f, f, \ldots, f,}_{\text{legalább 2}} \; l, f \; \underbrace{l, l, \ldots, l.}_{\text{legalább 2}}$$

Bármelyik nemből 1-nél többet áttéve a másik blokkba, a második áttettnek már négyféle testvére lenne.

Így a kedvezőtlen sorrendek száma:

$$(4n+4)+4(n-5)=8n-16=8(n-2),$$

megegyezésben az I. megoldás (2) első törtjében a számláló kivonandójával.

Linnert László (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.)