I. megoldás. A számtani sorozatban szokásos jelölést használva

$$a_k = a + (k-1)d, \quad A_k = kq^{a+(k-1)d}.$$

A mértani sorozat összegképletének levezetésénél célszerűnek bizonyult az összeget megszorozni q-val, s a kapott két sorozat különbségét venni. Próbálkozzunk most is ezzel az ötlettel. Szorozzuk meg, az S_n sorozatot q^d-nel, ami 1-től különböző pozitív szám, hacsak $d \neq 0$. ($d=0$ esetben a sorozat számtani sorozatba megy át, s ennek összegét könnyű meghatározni.)

$$S_n = q^a + 2q^{a+d} + 3q^{a+2d} + \ldots + nq^{a+(n-1)d},$$
$$q^d S_n = q^{a+d} + 2q^{a+2d} + 3q^{a+3d} + \ldots + nq^{a+nd}.$$

A második összeget az elsőből kivonva, kiemelés után kapjuk, hogy

$$S_n(1-q^d) = q^a(1 + q^d + q^{2d} + \ldots + q^{(n-1)d} - nq^{nd}).$$

A zárójelben levő mértani sorozatra az ismert összegezési formulát alkalmazva a következő kifejezést kapjuk:

$$S_n = \frac{q^a}{1-q^d}\left(\frac{1-(q^d)^n}{1-q^d} - nq^{nd}\right) = \frac{q^a}{(1-q^d)^2}(1-(n+1)q^{nd} + nq^{(n+1)d}).$$

Gyimesi László (Budapest, Piarista Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Vezessük be a következő további jelöléseket: $q^d = x$ és $q^a = r$, ekkor

$$S_n = r + 2rx + 3rx^2 + \ldots + rnx^{n-1} = r(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}).$$

Az az észrevétel, hogy itt a kx^{k-1} tag az x^k-nak a deriváltja, azt jelenti, hogy az $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$ összeg a $P(x) = x + x^2 + \ldots + x^n$ összegnek a deriváltja. Ennélfogva a

$$P(x) = x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1}-x}{x-1}$$

azonosság alapján (hacsak $x \neq 1$) az összeg deriváltja egyenlő a jobb oldalon álló kifejezés deriváltjával. Ismert deriválási szabályok alapján

$$P_n'(x) = \frac{\left[(n+1)x^n - 1\right](x-1) - (x^{n+1}-x)}{(x-1)^2} = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Ezt $r = q^a$-nal megszorozva és $x = q^d$-t beírva, az előző megoldásban kapott eredményhez jutunk.

III. megoldás. Az előző megoldásban használt jelöléseket megtartva írjuk fel az S_n összeg r-ed részét és jelöljük F_n-nel:

$$F_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Ez az összeg meghatározható a következőképpen is: legyen

$$\begin{aligned}
&f_1 = x^{n-1},\\
&f_2 = x^{n-1} + x^{n-2},\\
&f_3 = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f_n = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + x^2 + x + 1,
\end{aligned}$$

ekkor nyilvánvalóan

$$(*) \qquad F_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n.$$

Az $f_k (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ összeg abból a mértani sorozatból az első k elem összege, amelynek első tagja x^{n-1} és hányadosa $y = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{q^d} \neq 1$.

Így a mértani sorozatra vonatkozó összefüggés alapján

$$f_k = x^{n-1}\frac{y^k-1}{y-1} = cy^k - c,$$

ahol c-vel átmenetileg az $\dfrac{x^{n-1}}{y-1}$ kifejezést rövidítjük. Ennek és a (*) összefüggésnek a felhasználásával

$$F_n = c(y + y^2 + \ldots + y^n) - nc = cy\frac{y^n-1}{y-1} - nc$$

alakba írható, és ebből $y = \dfrac{1}{x}$ és c visszahelyettesítésével az előző megoldás $P_n'(x)$ eredményéhez jutunk.